Loi normale

Classe de terminale STMG - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2013/2014

Objectifs :

- Savoir interpréter graphiquement une valeur approchée de la probabilité d'un événement dans le cas d'une variable aléatoire suivant une loi normale.

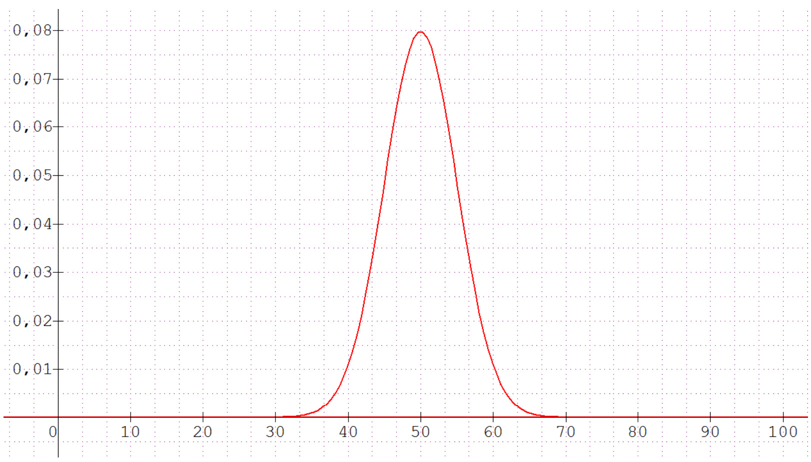
1 Courbe en cloche

La loi normale est une loi de probabilité très adaptée pour modéliser la plupart des phénomènes aléatoires naturels. Une des premières études de la loi normale est due au mathématicien français Abraham de Moivre (1667-1754) qui étudiait le jeu de pile ou face.

Rappel (loi binomiale) : Dans le jeu de pile ou face répété n fois, on définie une variable aléatoire X qui affecte la valeur 0 à **pile** et la valeur 1 à **face**. Lorsque n est suffisamment grand on obtient environ 50% de face. L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre $E(X) = n \times 0,5$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et $0,5$, notée $B(n; 0,5)$.

Concrètement, si on lance 100 fois la pièce on peut raisonnablement espérer obtenir 50 fois face. Avec beaucoup de chance, on peut obtenir 100 fois face. Avec beaucoup de malchance, 100 fois pile.

La **courbe en cloche** ci-dessous représente la probabilité du nombre de face obtenus pour 100 lancers :



Définition 1 – Courbe en cloche

La **courbe en cloche** de paramètres μ et σ a les propriétés suivantes :
- Elle représente une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictements positives.
- Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
- L'aire de la surface entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1.

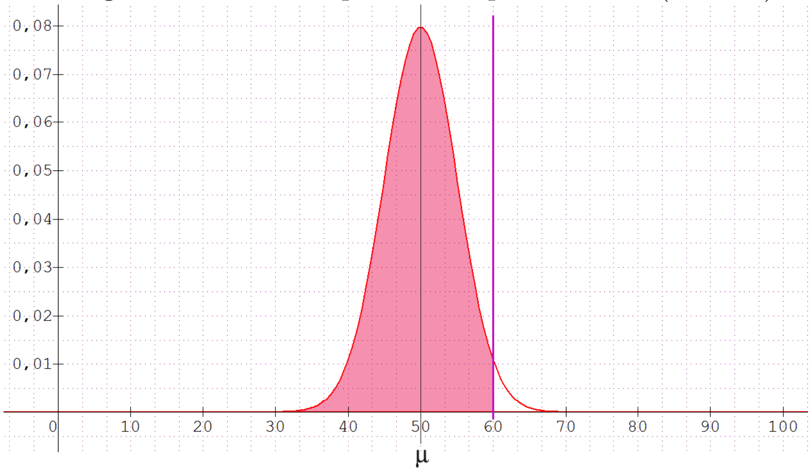
2 Loi normale

Définition 2 – Loi normale

Une variable aléatoire X qui suit une loi normale de paramètres μ (espérance de X) et σ (écart type de X), notée $N(\mu;\sigma)$ possède les caractéristiques suivantes :

- X est associée à la courbe en cloche de paramètres μ et σ. Cette courbe est appelée **courbe de densité**.
- Pour tout réel a, la probabilité $P(X \leqslant a)$ est égale à l'aire de la surface entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$.

L'aire grisée ci-dessous représente la probabilité $P(X \leqslant 60)$:



Propriété 1 – intervalle de fluctuation

Pour une variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(\mu;\sigma)$ on a :

$$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$ est appelé intervalle de fluctuation de la variable aléatoire X au seuil approximatif de 95%.

Pour la variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(50;5)$ on a $\mu - 2\sigma = 40$ et $\mu + 2\sigma = 60$: