Probabilités conditionnelles

Classe de terminale STMG - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2013

Objectifs :

- Calculer une probabilité conditionnelle.
- Calculer la probabilité de l'intersection de deux événements.
- Calculer une probabilité à partir d'un arbre pondéré.
- Construire un arbre pondéré.

1 Événements et probabilités

Soit un jeu de 52 cartes. On réalise une **expérience aléatoire** qui consiste à tirer au hasard une carte de ce jeu. Le jeux n'étant pas truqué, chaque carte a la même probabilité d'être choisie.
L'**univers**, noté Ω, est le jeu de carte.

On considère les deux **événements** A et B suivants :
A : « la carte tirée est rouge »
B : « la carte tirée est un as »

Définition 1 – Probabilité d'un événement

Dans les conditions ci-dessus, la **probabilité de l'événement *A*** est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de résultats dans } A}{\text{nombre total de résultats de } \Omega}.$$

Sachant qu'un jeu de 52 cartes contient 26 cartes rouges et 4 as, on calcule :

$$P(A) = \frac{26}{52} = 0,5 \qquad P(B = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Définition 2 – Événement contraire

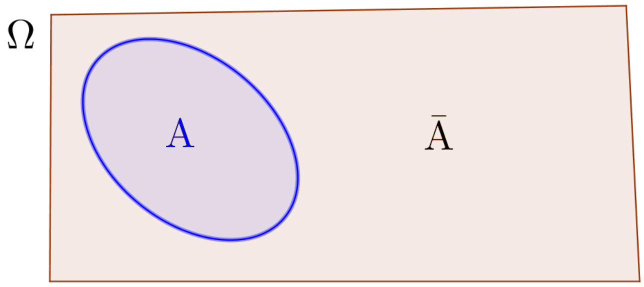
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est composé de tous les résultats qui ne sont pas dans A.

Propriété 1

$$P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(A).$$

Preuve par l'exemple – Sachant qu'un jeu de 52 cartes contient 26 cartes « non rouges » et 48 « non as », on calcule :

$$P(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{26}{52} = 0,5 = 1 - P(A) \qquad P(\overline{\mathrm{B}}) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13} = 1 - P(B)$$



Définition 3 – Intersection $A \cap B$

L'**intersection** $A \cap B$ est composée de tous les résultats **en même temps dans** $\boldsymbol{A}$ **et dans** $\boldsymbol{B}$.

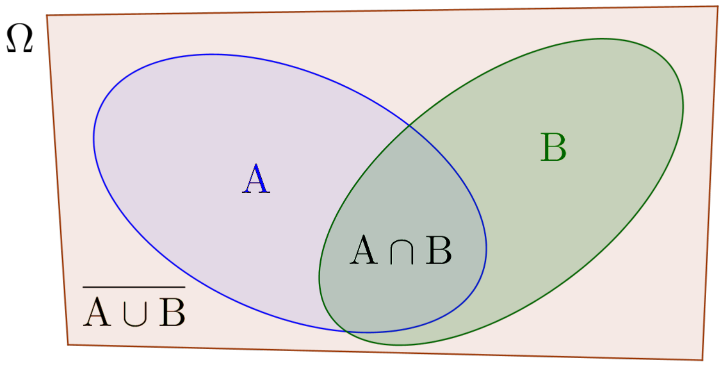
Définition 4 – Réunion $A \cup B$

La **réunion** $A \cup B$ est composée de tous les résultats **dans** $\boldsymbol{A}$ **ou dans** $\boldsymbol{B}$ ou **dans** $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ **en même temps**.

Propriété 2

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap \mathrm{B}).$$

Preuve par l'image :



on a : $P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] + P(A \cap B)$
donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$
donc : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2 Probabilité conditionnelle $P_A(B)$ et arbre

Dans l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, on considère deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$.

Définition 5 – probabilité de B sachant A

La probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est appelé « **probabilité de B sachant A** » et se note $P_A(B)$.

Exemple – Une étude statistique faite par une auto-école montre que sur 1000 candidats au permis de conduire, 132 pratiquent la conduite accompagnée et parmi eux 99 obtiennent le permis du premier coup.
On considère les événements :

A : « le candidat a pratiqué la conduite accompagnée »
B : « le candidat obtient son permis du premier coup »

La probabilité d'obtenir son permis du premier coup avec la conduite accompagnée est égale à :

$$P_A(B) = \frac{99}{132} = 0,75$$

On choisit un candidat au hasard parmi les 1000 candidats de cette étude,

la probabilité qu'il ait pratiqué la conduite accompagnée est :

$$P(A) = \frac{132}{1000} = 0,132$$

la probabilité qu'il ait pratiqué la conduite accompagnée et obtenu son permis du premier coup est :

$$P(A \cap B) = \frac{99}{1000} = 0,099$$

On vérifie que l'on a aussi : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,75 \times 0,132 = 0,099$

Propriété 3 – probabilité conditionnelle

Probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On en déduit la probabilité « A et B » : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Sur un arbre pondéré, $P_A(B)$ se place **sur la branche de A vers B**.