Théorème de Bézout

Terminale S spécialité - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015-2016

1 Le théorème de Bézout

Propriété 1

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Dire que a et b sont premiers entre eux *équivaut à dire* qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Preuve. *L'équivalence doit être démontrée dans les deux sens.*

- **On suppose qu'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$ et nous allons démontrer que a et b sont premiers entre eux :**
  Soit d un diviseur commun de a et de b.
  d divise a et b donc d divise $au + bv$.
  Comme $au + bv = 1$, $d = 1$ et a et b sont premiers entre eux.

- ***Réciproquement*, on suppose que a et b sont premiers entre eux et nous allons démontrer qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$:**
  Soit E l'ensemble des nombres de la forme $au + bv$, avec u et v dans $\mathbb{Z}$.
  E contient des entiers strictement positifs (par exemple a, b, $a+b$ appartiennent à E) et, parmi eux, il en existe un qui est plus petit que tous les autres (car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément). Notons $d = au_1 + bv_1$ ce plus petit élément.
  La division euclidienne de a par d donne : $a = dq + r$, avec $0 \leqslant r < d$.
  On en déduit $r = a - dq = a - (au_1 + bv_1)q = a(1 - u_1q) + bv_1q$. Donc r appartient à E.
  Or d est le plus petit entier strictement positif de E donc $r = 0$, ce qui prouve que d divise a.
  On montre de même que d divise b.
  Comme a et b sont premiers entre eux, on en déduit que $au_1 + bv_1 = 1$.

Exemple. $7 \times (-2) + 3 \times 5 = 1$ donc 7 et 3 sont premiers entre eux (et aussi 7 et 5).

Exemple. Deux entiers naturels consécutifs et supérieurs à 1 sont premiers entre eux car $n+1-n = 1$.

Méthode. Utilisation de l'algorithme d'Euclide pour trouver u et v.
Exemple : pour $a = 89$ et $b = 41$.
$89 = 41 \times 2 + 7$ donc $7 = 89 - 2 \times 41 = a - 2b$
$41 = 7 \times 5 + 6$ donc $6 = 41 - 7 \times 5 = b - 5(a - 2b) = -5a + 11b$
$7 = 6 \times 1 + 1$ donc $1 = 7 - 6 = a - 2b + 5a - 11b = 6a - 13b$
Conclusion : $89 \times 6 + 41 \times (-13) = 1$

2 Nouvelle caractérisation du PGCD

Propriété 2

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Dire que d est le PGCD de a et b *équivaut à dire* que « d est un diviseur de a et de b et il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$ ».

Preuve. *L'équivalence doit être démontrée dans les deux sens.*

- On suppose que $d = \text{PGCD}(a; b)$
  donc il existe deux entiers naturels a' et b' tels que $a = da'$, $b = db'$ et $\text{PGCD}(a'; b') = 1$
  On en déduit qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a'u + b'v = 1$
  d'où : $da'u + db'v = d$ soit $au + bv = d$

- *Réciproquement*, on suppose que « d est un diviseur de a et de b et il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$ »
  Notons $\delta = \text{PGCD}(a; b)$.
  d divise a et b donc $d \leqslant \delta$.
  δ divise a et b donc δ divise $au + bv = d$ d'où $\delta \leqslant d$
  Donc $\delta = d$. d est le PGCD de a et b.