Introduction à l'arithmétique

Terminale S spécialité - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015-2016

1 Les nombres entiers

L'arithmétique est l'étude des nombres entiers : on travaille donc avec l'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, mais aussi avec l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$$
$$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$$

Signalons que, quand on ne précise pas, « entier » signifie toujours « entier relatif ».

Définition 1 – Entier pair / impair

Un entier *pair* est un multiple de 2 : il peut s'écrire sous la forme $2n$, où n est un entier relatif quelconque.
Quand un entier n'est pas pair, il est dit *impair* : il peut s'écrire sous la forme $2n + 1$, où n est un entier relatif quelconque.

Définition 2 – Entiers consécutifs

Deux entiers *consécutifs* sont deux entiers qui se suivent : ils peuvent s'écrire n et $n + 1$ par exemple (ou bien $n - 1$ et n), avec n entier relatif quelconque.

Définition 3 – Carré parfait

Un *carré parfait* est le carré d'un entier : il peut s'écrire sous la forme $n^2 = n \times n$, avec n entier relatif quelconque.

Pour faire de l'arithmétique, il est bon de savoir reconnaître certains nombres entiers particuliers :

- **La table de Pythagore :**

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**

- **Les carrés des premiers entiers**, ceux que l'on voit sur une des diagonales de la table de Pythagore mais aussi :

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
n^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	625

- **Les cubes de quelques entiers :**

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

- **Les premières puissances de 2 et de 3 :**

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

n	1	2	3	4	5	6
3^n	3	9	27	81	243	729

2 Les nombres non-entiers

Définition 4 – Nombre rationnel

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers, $q \neq 0$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque : L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réel est partagé en deux sous-ensembles : les **nombres rationnels** et les **nombres irrationnels**.
L'ensemble des nombres rationnels contient plusieurs sous-ensembles :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des **entiers naturels** : $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots$
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs** : $;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots$
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des **décimaux** : $-0,2\ ;\ 2,0\ ;\ 3,14\ ;\ \ldots$
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des **nombres rationnels** : $\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{-3}{7}\ ;\ \dfrac{2}{1}\ ;\ \ldots$

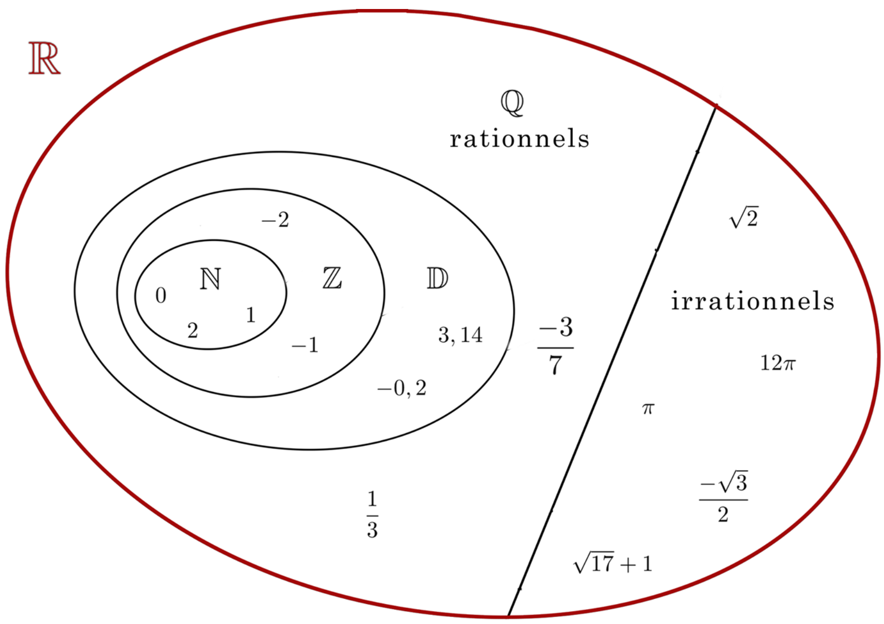
Les **nombres irrationnels** sont les nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers, $q \neq 0$.

Propriété 1

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Preuve (raisonnement par l'absurde) : On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Donc $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers, $q \neq 0$.

On en déduit $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ puis $2q^2 = p^2$, donc p^2 est pair et par conséquent p est pair. On peut donc écrire $p = 2p'$ puis $q^2 = 2p'^2$. On en déduit que q^2 est pair et par conséquent q est pair. Cette conclusion est contradictoire avec le fait que $\dfrac{p}{q}$ est une fraction irréductible. Il est donc impossible de mettre $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction irréductible, et donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.


$\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$
rationnels
$\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{D}$
0
2
1
-2
-1
$3,14$
$-0,2$
$\frac{-3}{7}$
$\frac{1}{3}$
$\sqrt{2}$
irrationnels
12π
π
$\frac{-\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt{17}+1$