Loi binomiale

Classe de Première STMG - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr

Objectifs :

- Représenter la répétition d'expériences par un arbre pondéré.
- Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.
- Calculer une espérance dans le cadre de la loi binomiale.

1 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

Propriété 1

Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chacun des résultats de la liste.

Exemple : On lance un dé à 6 faces deux fois de suite. La probabilité d'obtenir la liste $(1\,;1\,;1)$ est égale au produit $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$.

2 Schéma de Bernoulli

Définition 1 – Epreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues. L'une des issues est appelée **succès** et est notée S. L'autre issue est appelée **échec** et est notée $\overline{S}$.

Définition 2 – Loi de Bernoulli

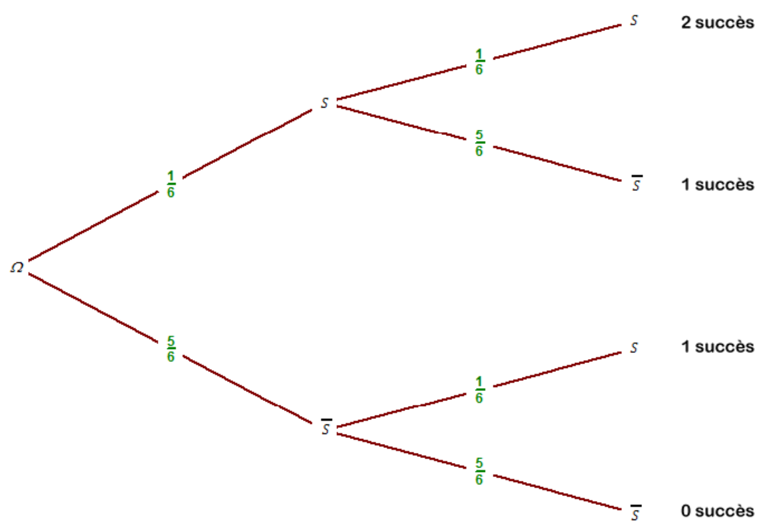
Une loi de Bernoulli de paramètre p est loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p.

Exemple : On lance un dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 1.
Cette épreuve est associée à la loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.

Définition 3 – Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple : On lance deux fois le même dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 6.
Ce schéma de Bernoulli peut être représenté par un arbre pondéré :



3 Loi binomiale

Définition 4 – Loi Binomiale

Soit X une variable aléatoire qui compte le nombre de succès des n épreuves d'un schéma de Bernoulli de paramètre p.
La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On la note $\mathcal{B}(n;p)$.

Exemple : On lance deux fois le même dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. La loi de probabilité de X est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2;\dfrac{1}{6}\right)$, donnée par le tableau ci-dessous :

nombre k de succès	0	1	2
$P(x=k)$	$\dfrac{25}{36}$	$\dfrac{10}{36}$	$\dfrac{1}{36}$

Propriété 2 – Espérance d'une loi binomiale (*propriété admise*)

L'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ est égale à $n \times p$.

Exemple : L'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(300;\dfrac{1}{6}\right)$ est égale à $300 \times \dfrac{1}{6} = 50$.
(En lançant 300 fois un dé on peut espérer tomber environ 50 fois sur 1).

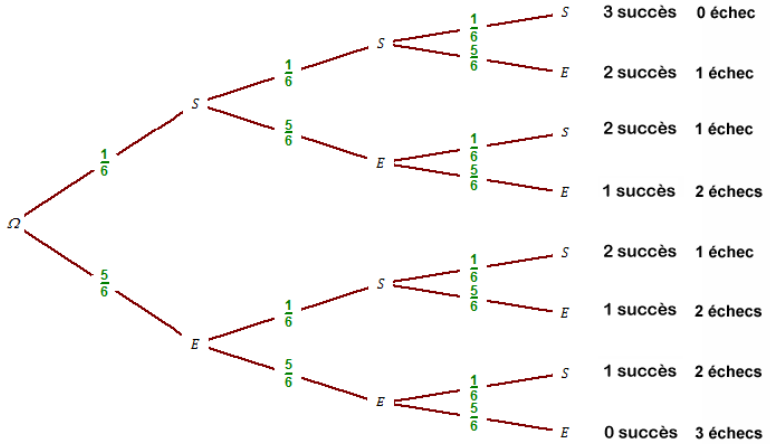
Propriété 3 – (*propriété admise* et définition)

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Sur un arbre pondéré $\dbinom{n}{k}$ est le nombre de chemins correspondants à k succès parmi n épreuves (on dit k parmi n). Ce nombre, appelé **coefficient binomial**, peut être calculé à la calculatrice (fonction **nCr**)

Exemple : On lance trois fois le même dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. La loi de probabilité de X est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3;\frac{1}{6}\right)$. Cette situation peut être illustrée par l'arbre ci-dessous :



Le tableau donne la loi de probabilité de X :

nombre k de succès	0	1	2	3
$P(x=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

On a : $P(X=2)=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216}\approx 0,069$

Exemple : On lance 50 fois le même dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 1.
$P(X=10)=\binom{50}{10}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{40}\approx 0,11$ (*cette situation ne peut pas être illustrée par un arbre*).

Remarque : on peut représenter la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ par un diagramme en bâtons :

- en abscisse on place les valeurs de la variable aléatoire X
- en ordonnée on place les probabilités $P(X=k)$.

Exemple : La loi binomiale $\mathcal{B}(7;0,55)$ est représentée par le diagramme en bâton ci-dessous (obtenu avec un tableur) :