Fonctions dérivées

Classe de Première STMG - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr

Objectifs :

- Connaître la notion de fonction dérivée.
- Connaître les fonctions dérivées des fonctions polynômes.
- Connaître le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation.

1 Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré deux

Propriété 1 – (propriété admise et définition)

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = 2ax + b$$

Exemple 1 : Si $f(x) = x^2 + x + 2$, alors $f'(x) = 2x + 1$

Exemple 2 : Si $g(x) = 5x^2 - 3x + 12$, alors $g'(x) = 10x - 3$

Exemple 3 : Si $h(x) = -4x^2 + 5$, alors $h'(x) = -8x$

2 Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré trois

Propriété 2 – (*admise*)

Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Exemple 4 : Si $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$, alors $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$

Exemple 5 : Si $g(x) = 5x^3 - 3x^2 + 12$, alors $g'(x) = 15x^2 - 6x$

Exemple 6 : Si $h(x) = -4x^3 + 5x$, alors $h'(x) = -12x^2 + 5$

3 Signe de la dérivée et sens de variation

Propriété 3 – (*admise*)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est **croissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est **décroissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

Application – Le tableau de variation d'une fonction peut se déduire du tableau de signe de sa fonction dérivée.

x	a		b		c		d
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	$f(d)$

4 Méthodes pour étudier les variations des fonctions polynôme

4.1 Fonctions polynôme de degré 2

Exemple 7 : Étude des variations de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 12$.
$f'(x) = 2x - 4$
f' est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 2$.
On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	8	↗	

$f(2) = 8$ (résultat pouvant être obtenu avec la calculatrice).

Exemple 8 : Étude des variations de la fonction g définie par $g(x) = -5x^2 + 3x - 6$.
alors $g'(x) = -10x + 3$
g' est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 0$ pour $x = 0,3$.
On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		$0,3$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$-5,55$	↘	

$f(0,3) = -5,55$ (résultat pouvant être obtenu avec la calculatrice).

4.2 Fonctions polynôme de degré 3

Exemple 9 : Étude des variations de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$.
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
Le trinôme $6x^2 + 6x - 12$ possède deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ (résultats pouvant être obtenu avec la calculatrice).
On se souvient que le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le signe de a, sauf entre les racines, si elles existent. On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	26	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

$f(-2) = 26$ et $f(1) - 1$ (résultats pouvant être obtenu avec la calculatrice).

Exemple 10 : Étude des variations de la fonction g définie par $g(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$.
$g'(x) = 6x^2 + 2x + 1$
Le trinôme $6x^2 + 2x + 1$ ne possède aucune racine (le discriminant est négatif).
On se souvient que le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le signe de a, sauf entre les racines, si elles existent. On en déduit les variations de g :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	