Probabilités

Classe de première ST2S - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2015

Objectifs :

- Savoir déterminer la probabilité d'un événement.
- Savoir modéliser une loi de probabilité.

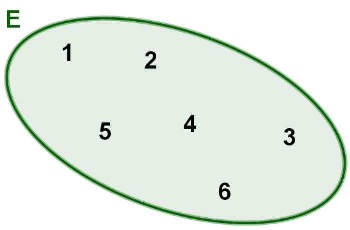
1 Langage des probabilités

Définition 1 – Expérience aléatoire

Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsque plusieurs résultats sont possibles mais imprévisibles.
Les résultats possibles sont généralement appelés **issues** ou **événements élémentaires**.

Notation – L'ensemble des n issues d'une expérience aléatoire est appelé l'univers et se note généralement $E = \{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\}$

Exemple : Pour l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à six faces, on a : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
On peut représenter cet univers par un diagramme :



Définition 2 – Loi de probabilité

Pour une expérience aléatoire, la probabilité de chaque issue x_i est un nombre noté p_i compris entre 0 et 1.
L'ensemble des probabilités vérifient : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.
La correspondance entre chaque issue et sa probabilité est appelée **loi de probabilité**.

Exemple : On lance simultanément deux dés à six faces et on additionne les nombres lus sur la face supérieure. On peut représenter la loi de probabilité avec un tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Définition 3 – Loi équirépartie

On dit qu'une loi de probabilité est **équirépartie** si toutes les issues ont la même probabilité. Dans ce cas, l'expérience aléatoire est dite **équiprobable**.

Exemple : Le jeux de pile ou face est une expérience aléatoire équiprobable à deux issues.

Propriété 1

Dans le cas d'une expérience aléatoire équiprobable à n issues, la probabilité p de chaque issue est :

$$p = \frac{1}{n}$$

Preuve : $\underbrace{p+p+p+...+p}_{n \text{ fois}} = 1$, soit $np = 1$ et $p = \frac{1}{n}$.

Propriété 2 – Loi des grand nombres (*propriété admise*)

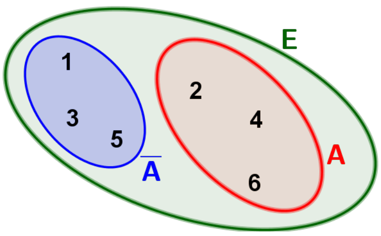
Si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire alors les fréquences observées s'approchent de la loi de probabilité.

2 Probabilité d'un événement

Définition 4 – Événement et Événement contraire

Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers E.
L'**événement contraire** d'un événement A est noté $\overline{A}$.

Exemple : Pour l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à six faces, on a : $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
L'événement « obtenir un nombre pair » est $A = \{2, 4, 6\}$.
L'événement contraire « ne pas obtenir un nombre pair » est $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.
On peut représenter ces événements par un diagramme :



Définition 5 – Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement A, notée $p(A)$ est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Propriété 3 – Probabilité d'un événement

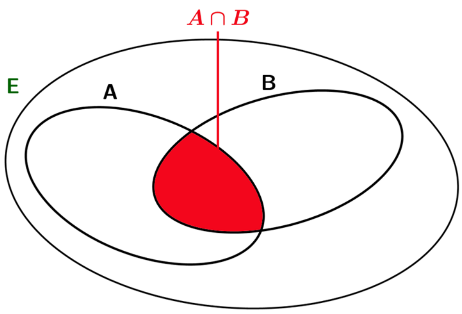
Pour une loi équirépartie : $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } E}$

Preuve : Si A est constitué de m issues : $p(A) = \underbrace{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{m \text{ fois}} = \frac{m}{n}$.

3 Intersection et réunion d'événements

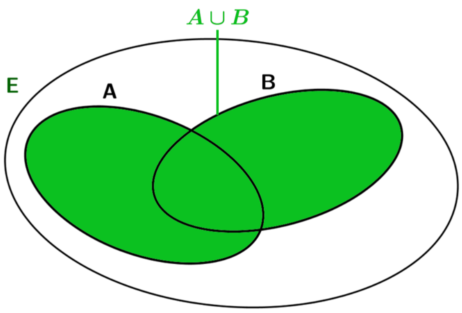
Définition 6 – Intersection de deux événements

L'intersection de deux événements A et B, noté $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B.
On dit « A inter B ».



Définition 7 – Réunion de deux événements

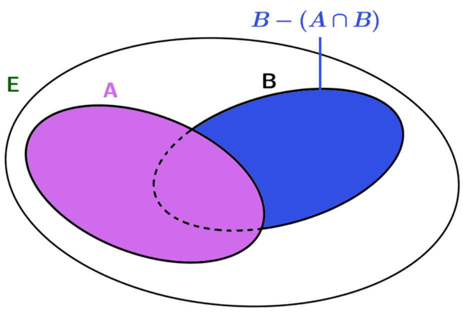
La réunion de deux événements A et B, noté $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (c'est à dire au moins un des deux événements).
On dit « A union B ».



Propriété 4 – Probabilité de la réunion de deux événements

Pour tous les événements A et B : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

preuve : on peut aussi écrire $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.



Propriété 5

Pour tout événement A : $p(A) + p(\overline{A}) = 1$

Preuve : $p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) - p(A \cap \overline{A})$
de plus $A \cup \overline{A} = E$ donc $p(A \cup \overline{A}) = 1$, et $A \cap \overline{A} = \varnothing$ donc $p(A \cap \overline{A}) = 0$. On en déduit $p(A) + p(\overline{A}) = 1$.