1 Fonction polynôme du second degré

f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3(x-3)(x+1)$$

Résoudre l'équation $f(x) = 0$

2 Résoudre les équations

a) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

b) $3x^2 + 12x + 12 = 0$

c) $8x^2 - 44x - 24 = 0$

3 Caractéristiques graphiques

f est une fonction polynôme de degré 2, pouvant s'écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$ et possédant le signe décrit dans un tableau ci-dessous.
Dans chaque cas, tracer une courbe pouvant représenter la fonction f, indiquer le signe de a et donner la valeur l'abscisse du sommet.

a)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

b)

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

4 Application

Des entomologistes ont étudié, sur une période de 100 jours, le nombre d'abeilles dans une ruche. Ils ont modélisé ce nombre par la fonction n définie par :

$$n(t) = \frac{t^2}{2} - 20t + 3000$$

Quel est le jour où le nombre d'abeilles est le même qu'au dixième jour ?

CORRECTION

1 Fonction polynôme du second degré

$3(x-3)(x+1) = 0$ est nul pour $x - 3 = 0$ ou pour $x + 1 = 0$
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc $S = \{3; -1\}$

2 Résoudre les équations

a) $4x^2 - 20x + 25 = 0 \qquad a = 4 \quad b = -20 \quad c = 25$
$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - (4 \times 4 \times 25) = 0$
$\Delta = 0$ donc l'équation possède une racine double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
$x_0 = \dfrac{20}{8} = \dfrac{5}{2} \qquad S = \{\dfrac{5}{2}\}$

b) $3x^2 + 12x + 12 = 0 \qquad a = 3 \quad b = 12 \quad c = 12$
$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - (4 \times 3 \times 12) = 0$
$\Delta = 0$ donc l'équation possède une racine double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
$x_0 = \dfrac{-12}{6} = -2 \qquad S = \{-2\}$

c) $8x^2 - 44x - 24 = 0 \qquad a = 8 \quad b = -44 \quad c = -24$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-44)^2 - (4 \times 8 \times (-24)) = 1936 + 768 = 2704 = 52^2$
$\Delta > 0$ donc l'équation possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$x_1 = \dfrac{-44 - 52}{16} = -6$

$x_2 = \dfrac{-44 + 52}{16} = \dfrac{1}{2} \qquad S = \{-6; \dfrac{1}{2}\}$

3 Caractéristiques graphiques

a) Le sommet a pour coordonnées $(3; 0)$, l'abscisse du sommet est 3

b) Le sommet a pour coordonnées $(-2; f(-2))$, l'abscisse du sommet est -2

4 Application

Au dixième jour, le nombre d'abeilles est $n(10) = \dfrac{10^2}{2} - 200 + 3000 = 2850$
On cherche le jour t où le nombre d'abeille est 2850.
L'équation à résoudre est donc :

$$\frac{t^2}{2} - 20t + 3000 = 2850$$

$$\text{qui peut aussi s'écrire : } \frac{t^2}{2} - 20t + 150 = 0$$

$a = \dfrac{1}{2} \quad b = -20 \quad c = 150$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - (4 \times \dfrac{1}{2} \times 150) = 400 - 300 = 100 = 10^2$
$\Delta > 0 \quad$ donc l'équation possède deux racines distinctes :

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$t_1 = \dfrac{20 - \sqrt{100}}{2 \times \dfrac{1}{2}} = 10$

$t_2 = \dfrac{20 + \sqrt{100}}{2 \times \dfrac{1}{2}} = 30$

conclusion : le trentième jour, le nombre d'abeilles est le même qu'au dixième jour.