Variables aléatoires

Classe de Première ES - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2013/2014

Objectifs :

- Savoir établir la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Savoir calculer l'espérance d'une variable aléatoire.

1 Variable aléatoire

1.1 Définition

Définition 1 – variable aléatoire

On définit une **variable aléatoire** sur l'ensemble des résultats possibles d'une **expérience aléatoire** lorsqu'à chaque issue on associe un nombre réel.

Exemple 1 : On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
On associe à chaque face une valeur : 0 si le nombre de la face est pair, le double du nombre sinon.
On a ainsi fabriqué une variable aléatoire X telle que :

$$X(1) = 2,\ X(2) = 0,\ X(3) = 6,\ X(4) = 0,\ X(5) = 10,\ X(6) = 0$$

Remarque – Une variable aléatoire est une fonction de l'univers Ω vers $\mathbb{R}$ (l'expression « fonction aléatoire » aurait été mieux choisie).

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2 – loi de probabilité

La **loi de probabilité d'une variable aléatoire** X associe à chaque valeur x_i de X la probabilité d'obtenir cette valeur.

Exemple 2 : On reprend le jeu de dé de l'exemple 1.
L'ensemble des valeurs prises par X est $\{0, 2, 6, 10\}$. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est définie dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	2	6	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3 – Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.
L'espérance de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + ... + x_n P(X = x_n)$$

En notant p_i la probabilité $P(X = x_i)$ on peut écrire plus simplement :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

Exemple 3 : On reprend le jeu de dé des exemples 1 et 2.

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 6 + \frac{1}{6} \times 10 = 3$$

Interprétation :
Si une partie coûte 4 euros, et si le joueur gagne le double du nombre affiché par le dé à condition que ce nombre soit impair alors on peut définir une nouvelle variable aléatoire Y qui associe un gain à chaque issue possible.
La **loi de probabilité** de la variable aléatoire Y est définie dans le tableau ci-dessous :

y_i	-4	-2	2	6
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance de gain est :

$$E(Y) = \frac{1}{2} \times (-4) + \frac{1}{6} \times (-2) + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 6 = -1$$

Cela signifie que l'organisateur du jeu peut espérer gagner 1 euro en moyenne par partie (et qu'un joueur a plus de chance de perdre que de gagner).