Suites numériques

Classe de Première ES - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2013

Objectifs :

- Connaître la notion de suite.
- Connaître les caractéristiques des suites arithmétiques.
- Connaître les caractéristiques des suites géométriques.

1 Généralités

Définition 1 – suite numérique

Une suite numérique est une liste de nombres. Chaque nombre est appelé terme de la suite. On note généralement la suite (u_n).

Exemple : Les six premiers termes d'une suite (u_n) sont 8, 10, 11, 14, 16, 20 ...
En numérotant les termes à partir de 0, on voit que :

- le terme de rang 0 est 8
- le terme de rang 1 est 10
- le terme de rang 4 est 16

Remarque : le terme de rang 4 est noté u_4.
Dans l'exemple ci-dessus, on a donc : $u_0 = 8, \quad u_1 = 10, \quad u_4 = 16$

2 Construction d'une suite

Il existe deux façons de construire une suite :

- par une formule générale
- terme par terme à partir des termes de rang inférieur (**par récurrence**)

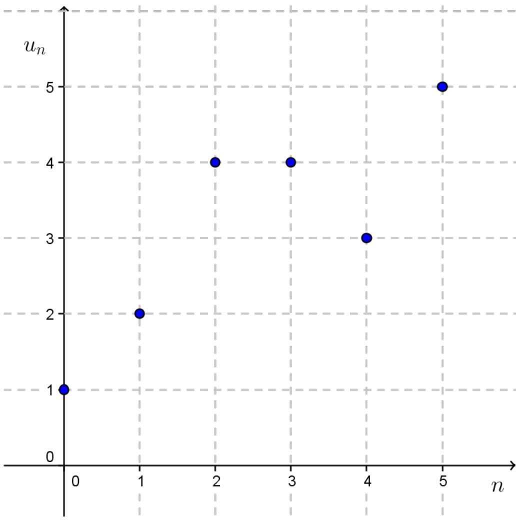
Exemple : Suite définie par une formule
La suite (u_n) est définie pour tout entier n par $u_n = n^2 + 1$.
On peut calculer chaque terme. Par exemple, $u_5 = 5^2 + 1 = 26$.

Exemple : Suite définie par récurrence
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n non nul par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$
Connaissant u_0 on peut calculer $u_1 = 3^2 + 1 = 10$, puis $u_2 = 101$, puis u_3, etc ...

3 Représentation graphique

Définition 2 – Représentation graphique d'une suite

L'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ constitue la **représentation graphique** de la suite (u_n).



Représentation graphique de la suite 1, 2, 4, 4, 3, 5.

4 Suites arithmétiques

Définition 3 – Suite arithmétique

Une **suite arithmétique** est **définie par récurrence** : on passe d'un terme au suivant en ajoutant à chaque fois le même nombre r :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Exemple : Les nombres 3, 7, 11, 15, 19, 23 forment le début d'une suite arithmétique de raison 4.

Propriété 1

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors on a :

$$u_n = u_0 + nr.$$

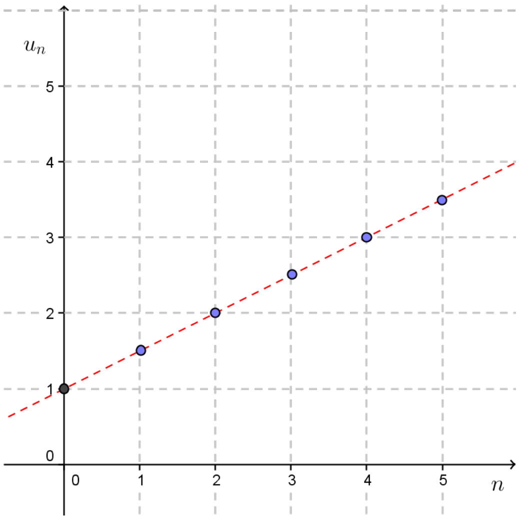
Preuve : Pour aller de u_0 à u_1 il faut ajouter r, pour aller de u_0 à u_2 il faut ajouter deux fois r, pour aller de u_0 à u_n il faut ajouter n fois r.

Exemple : Les nombres 3, 7, 11, 15, 19, 23 forment le début d'une suite arithmétique de raison 4.
$u_0 = 3$, $u_5 = 23$, $23 = 3 + 5 \times 4$.

Propriété 2 – Représentation graphique d'une suite arithmétique

Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés : on parle de croissance linéaire.

Remarque : On peut reconnaître la nature arithmétique d'une suite à partir de sa représentation graphique.



Représentation graphique de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 0,5$.
(Les points sont sur la droite d'équation $y = 0,5x + 1$).

5 Suites géométriques

Définition 4 – Suite géométrique

Une **suite géométrique** est **définie par récurrence** : on passe d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois le même nombre q :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple : Les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32 forment le début d'une suite géométrique de raison 2.

Propriété 3

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors on a :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Exemple : Dans un placement à intérêt composés à 3%, chaque année le capital est multiplié par 1,03. Le capital acquis suit une suite géométrique de raison 1,03.
Si le capital de départ est 10000 euros alors, 5 ans plus tard, il sera : $10000 \times 1,03^5 \approx 11592$ euros

Définition 5 – Sens de variation

- Si la raison est supérieure à 1, la suite géométrique est croissante.
- Si la raison est comprise entre 0 et 1, la suite géométrique est décroissante.