Fonctions polynômes du second degré

Classes de première ES - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2013/2014

Objectifs :

- Connaître les différentes formes d'une fonction polynôme du second degré.
- Savoir résoudre une équation du second degré.
- Savoir déterminer le signe d'un polynôme du second degré.

1 Polynômes et fonctions polynômes

Définition 1 – Polynôme du second degré

Un **polynôme** du second degré n est une expression du type

$$ax^2 + bx + c$$

où :
a, b, c sont des nombres réels, appelés les coefficients,
$a \neq 0$,
Le nombre x est appelé l'**indéterminée**.

Exemple 1 : $-3x^2 + 5x - 1$ est un polynôme du second degré ($a = 3\,;\, b = 5\,;\, c = -1$).

Exemple 2 : $16x^2 - 25$ est un polynôme du second degré ($a = 16\,;\, b = 0\,;\, c = -25$).

Exemple 3 : $5x^2$ est un polynôme du second degré ($a = 5\,;\, b = 0\,;\, c = 0$).

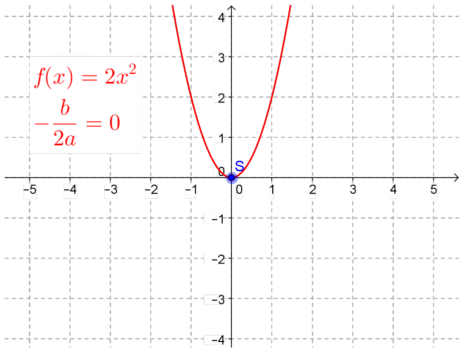
Remarque : Un polynôme du second degré est également appelé **trinôme**.

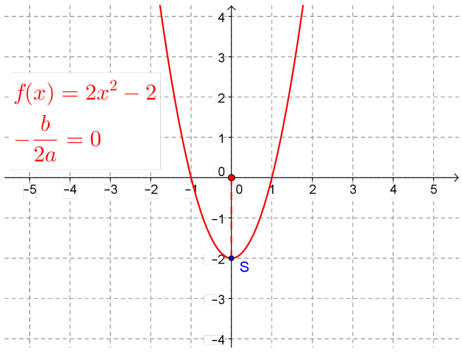
Définition 2 – Fonction polynôme du second degré

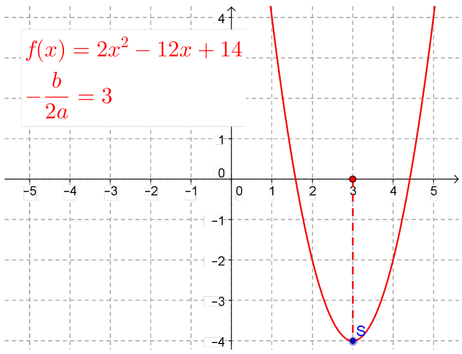
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ est appelée **fonction polynôme de degré 2** (ou **fonction trinôme**)

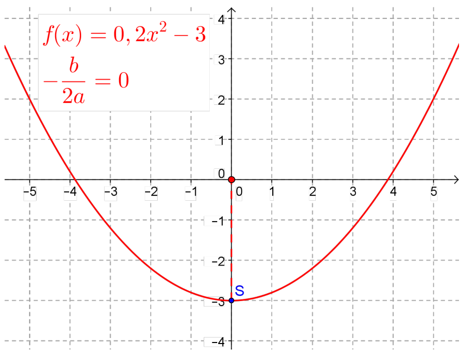
Propriété 1 – Courbe représentative d'une fonction polynôme

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ est une parabole dont le sommet a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.



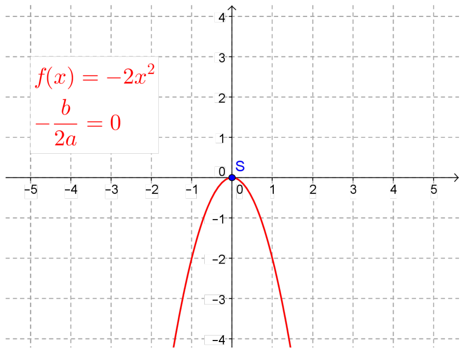


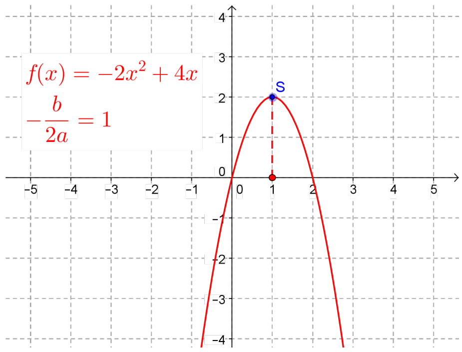


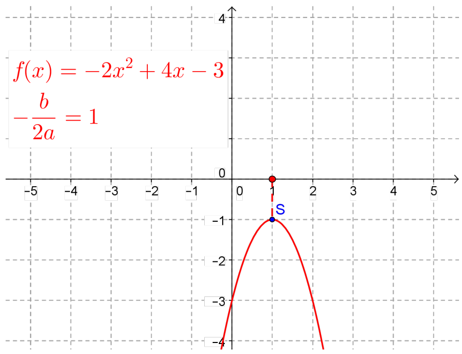


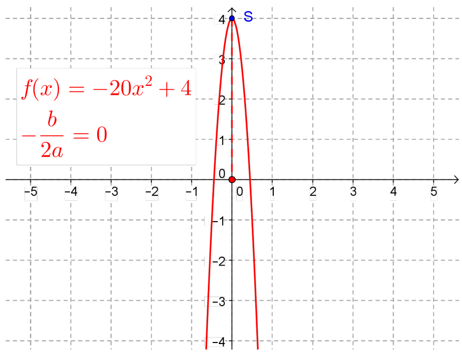
Si $a > 0$ f est décroissante puis croissante.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
variation de f	$+\infty$ ↘	$f(-\frac{b}{2a})$	↗ $+\infty$









Si $a < 0$ f est croissante puis décroissante.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
variation de f	$-\infty$ ↗	$f(-\frac{b}{2a})$	↘ $-\infty$

La parabole associée à f admet pour **sommet** le point S de coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}; f(-\dfrac{b}{2a})\right)$

2 Forme développée et forme canonique

Définition 3 – Forme développée

L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ d'une fonction polynôme de degré 2 est appelée **forme développée**

Propriété 2 – Forme canonique

Une fonction polynôme de degré 2 pouvant s'écrire sous la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{où} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

Cette forme est appelée **forme canonique**

Preuve :

$$\begin{aligned} a(x-\alpha)^2 + \beta &= a\left(x-\alpha\right)^2 + f\left(\alpha\right) \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

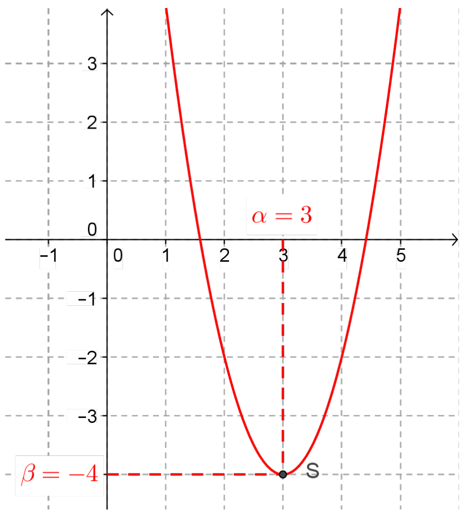
3 Interprétation graphique

La parabole associée à la fonction f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ admet pour **sommet** le point S de coordonnées $(\alpha; \beta)$

Exemple 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x^2 - 12x + 14$

On a : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 3$ et $\beta = f(3) = -4$

La forme canonique de f est $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$



4 Equations du second degré à une inconnue

4.1 Rappels sur les équations

Définition 4 – Equation

Une équation est une égalité contenant une ou plusieurs inconnues.

Exemple 5 : $x + 1 = 4$ est une équation du premier degré à une inconnue

Exemple 6 : $x^2 + 1 = x - 2$ est une équation du second degré à une inconnue

Définition 5 – Résoudre une équation

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.

Exemple 7 : $\{3\}$ est l'unique solution de l'équation $x + 1 = 4$.

Exemple 8 : $\{-2; 2\}$ sont les solutions de l'équation $x^2 = 4$.

Exemple 9 : L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution.

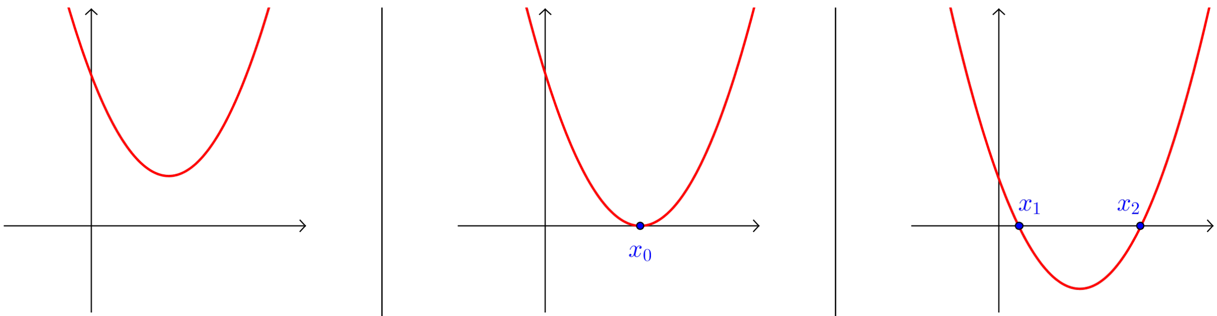
4.2 Équations du second degré

Un équation du second degré à une inconnue peut toujours s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$
Résoudre l'équation du second degré à une inconnue $ax^2 + bx + c = 0$ consiste à trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ s'annule.

Définition 6 – Discriminant

Le **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est le nombre réel Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Interprétation graphique : le nombre de solutions (0, 1 ou 2) dépend de la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses. L'étude du signe de Δ permet de connaître ce nombre.



cas 1 : $\Delta < 0$

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ne possède pas de solution.

pas de forme factorisée

cas 2 : $\Delta = 0$

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$f(x) = a\,(x - x_0)^2$$

cas 3 : $\Delta > 0$

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Définition 7 – racines de l'équation du second degré

Les solutions x_1 et x_2 sont appelées **racines** de l'équation.
L'unique solution x_0 est appelée **racine double** de l'équation.

5 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.

Preuve (solutions de l'équation du second degré) : Soit une fonction polynôme de degré 2 pouvant s'écrire sous la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
La forme canonique est : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

$$\begin{aligned}
a(x-\alpha)^2 + \beta &= a\,(x-\alpha)^2 + f\,(\alpha) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Si $b^2 - 4ac = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, $-\dfrac{b}{2a}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$

Si $b^2 - 4ac < 0$ alors $f(x)$ est toujours du signe de a ($a \neq 0$) donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution

Si $b^2 - 4ac > 0$ alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$