

Loi binomiale

Classe de Première ES - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr

Objectifs :

- Représenter la répétition d'expériences par un arbre pondéré.
- Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.
- Calculer une espérance dans le cadre de la loi binomiale.

1 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

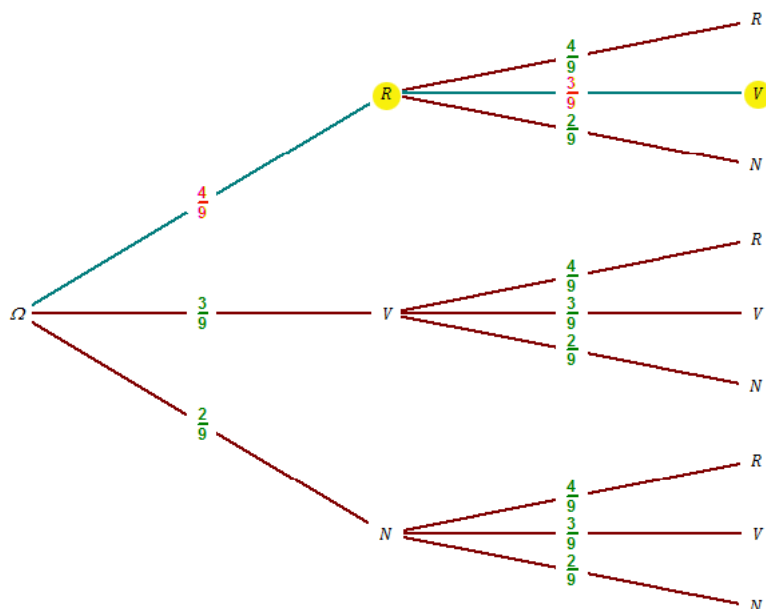
Propriété 1

Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chacun des résultats de la liste.

Exemple : Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules noires.

On tire successivement deux boules avec remise.

On peut représenter cette expérience par un arbre pondéré :



Le probabilité de la liste (R;V) est égale au produit $\frac{4}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{81}$

2 Schéma de Bernoulli

Définition 1 – Epreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues. L'une des issues est appelée **succès** et est notée S . L'autre issue est appelée **échec** et est notée \bar{S} .

Définition 2 – Loi de Bernoulli

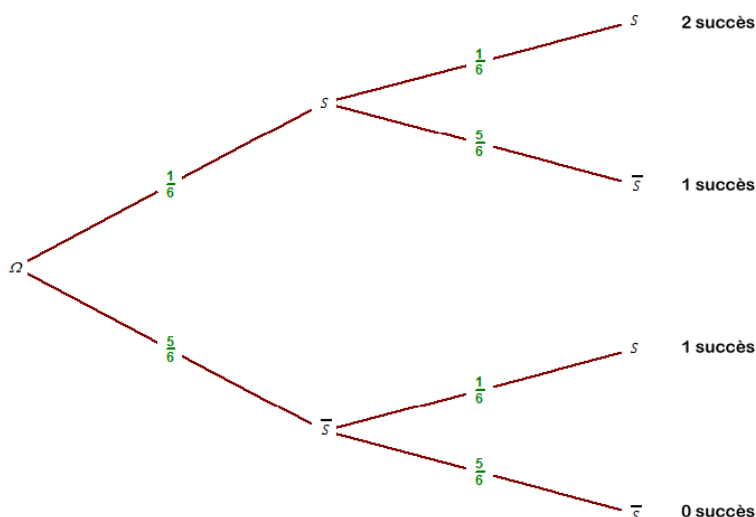
Une loi de Bernoulli de paramètre p est loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p .

Exemple : On lance un dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 6. Cette épreuve est associée à la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

Définition 3 – Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple : On lance deux fois le même dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 6. Ce schéma de Bernoulli peut être représenté par un arbre pondéré :



3 Loi binomiale

Définition 4 – Loi Binomiale

Soit X une variable aléatoire qui compte le nombre de succès des n épreuves d'un schéma de Bernoulli de paramètre p . La loi de probabilité X est appelée loi binomiale de paramètres n et p . On la note $\mathcal{B}(n; p)$.

Exemple : On lance deux fois le même dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 6. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. La loi de probabilité de X est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2; \frac{1}{6}\right)$, donnée par le tableau ci-dessous :

nombre k de succès	0	1	2
$P(x = k)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Propriété 2 – Espérance d’une loi binomiale (propriété admise)

L’espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ est égale à $n \times p$.

Exemple : L’espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(300; \frac{1}{6}\right)$ est égale à $300 \times \frac{1}{6} = 50$.
 (En lançant 300 fois un dé on peut espérer tomber environ 50 fois sur 6).

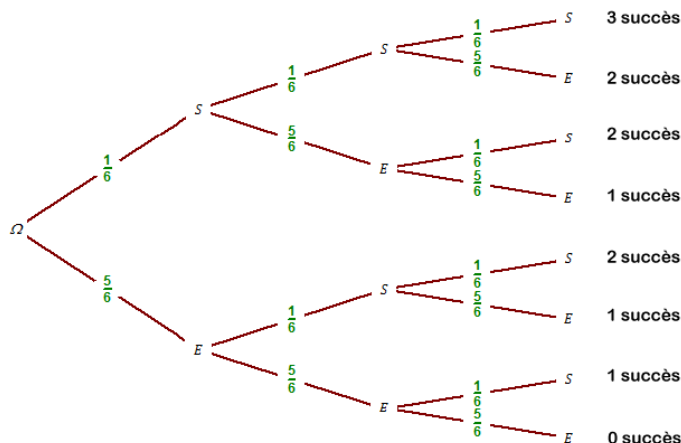
Propriété 3 – (propriété admise et définition)

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.
 Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Sur un arbre pondéré $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins correspondants à k succès parmi n épreuves (on dit k parmi n). Ce nombre, appelé **coefficient binomial**, peut être calculé à la calculatrice (fonction **nCr** sur Casio ou TI)

Exemple : On lance trois fois le même dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d’obtenir 6. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. La loi de probabilité de X est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{6}\right)$. Cette situation peut être illustrée par l’arbre ci-dessous :



Le tableau donne la loi de probabilité de X :

nombre k de succès	0	1	2	3
$P(x = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

On a : $P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216} \approx 0,069$

Exemple : On lance 50 fois le même dé à 6 faces. On considère comme succès le fait d’obtenir 6.
 $P(X = 10) = \binom{50}{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{40} \approx 0,11$ (cette situation ne peut pas être illustrée par un arbre).