Fonctions

Classe de Première ES - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2013

Objectifs :

- Savoir tracer la **courbe représentative** d'une fonction.
- Savoir dresser et interpréter un **tableau de variations**.
- Connaître les variations des fonctions **cube** et **racine carrée**.
- Connaître les notions de **nombre dérivé** et **tangente** en un point.

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définition

Définition 1 – fonction

Une **fonction** est une "**correspondance**" qui à tout nombre x d'un ensemble de définition D associe un unique nombre.

Remarque – On peut définir une fonction à partir :

- d'une formule,
- d'un tableau,
- d'une courbe (graphique).

1.2 Vocabulaire et Notations

Définition 2 – image

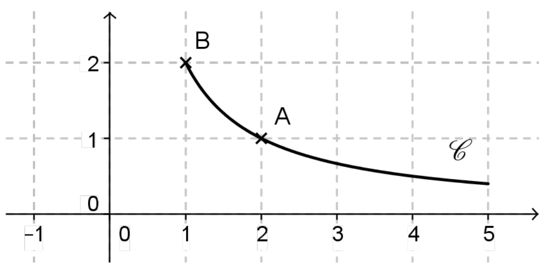
$f(x)$ est appelé **image** de x.

Remarque – La fonction f est parfois notée $f : x \longmapsto f(x)$ "La fonction f qui à x associe $f(x)$"

Définition 3 – antécédent

Si $f(a) = b$, on dit que a est un **antécédent** de b par f.

1.3 Fonction définie par une courbe



Ce graphique permet de définir une fonction f sur $D_f = [1; 5]$.
Seuls les points repérés permettent une lecture exacte des valeurs.

1.4 Fonction définie par un tableau

x	-5	-3	0	3	6
$g(x)$	4	3	8	4	7

L'ensemble de définition de la fonction g se réduit à 5 nombres : $D_g = \{-5; -3; 0; 3; 6\}$.

1.5 Fonction définie par une formule

h est la fonction définie par : $h(x) = 2x^2 + x - 1$

On peut aussi écrire : $h : x \longmapsto 2x^2 + x - 1$

L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

2 Variations

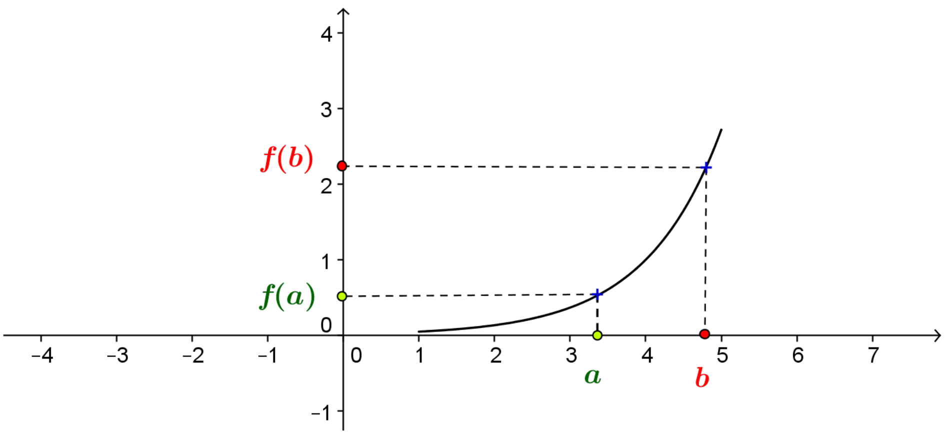
2.1 Fonctions croissantes - Fonctions décroissantes

Définition 4 – Fonction croissante sur un intervalle

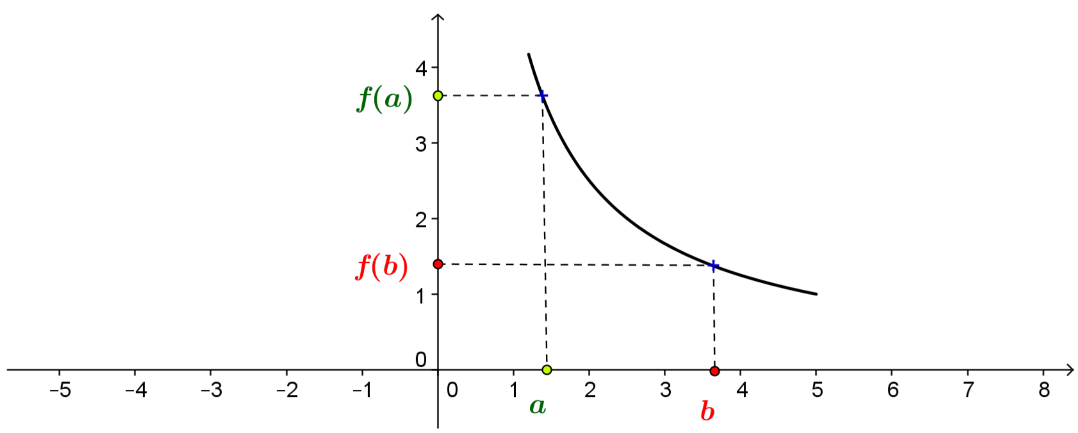
Une fonction f est **croissante sur** I, si pour tous nombres a et b appartenant à I avec $a < b$ on a $f(a) \leqslant f(b)$.

Définition 5 – Fonction décroissante sur un intervalle

Une fonction f est **décroissante sur** I, si pour tout nombre a et b appartenant à I avec $a < b$ on a $f(a) \geqslant f(b)$.



Fonction croissante : les images sont rangées dans le **même ordre** que leurs antécédents.



Fonction décroissante : les images sont rangées dans l'**ordre inverse** de leurs antécédents.

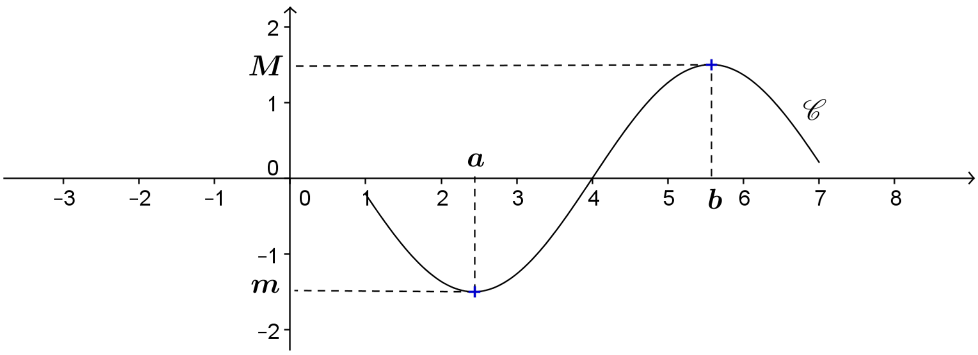
2.2 Extremum

Définition 6 – minimum - Maximum

f admet un **minimum** m en a si pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(a)$
f admet un **Maximum** M en b si pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(b)$

2.3 Tableau de variations - Tableau de signes

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $[1; 7]$:



On résume les variations de f dans un **Tableau de variations** :

x	1	a	b	7
$f(x)$	$f(1)$ ↘	$f(a)$ ↗	$f(b)$ ↘	$f(7)$

$f(a)$ est le minimum sur $[1; b]$ $f(b)$ est le maximum sur $[a; 7]$
f est décroissante sur $[1; a]$ et sur $[b; 7]$ f est croissante sur $[a; b]$

On résume les variations de signe de f dans un **Tableau de signes** :

x	1		4		7
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3 Fonction cube

Définition 7

La fonction cube est définie par : $f : x \longmapsto f(x) = x^3$

- **Ensemble de définition de la fonction cube :**

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$.

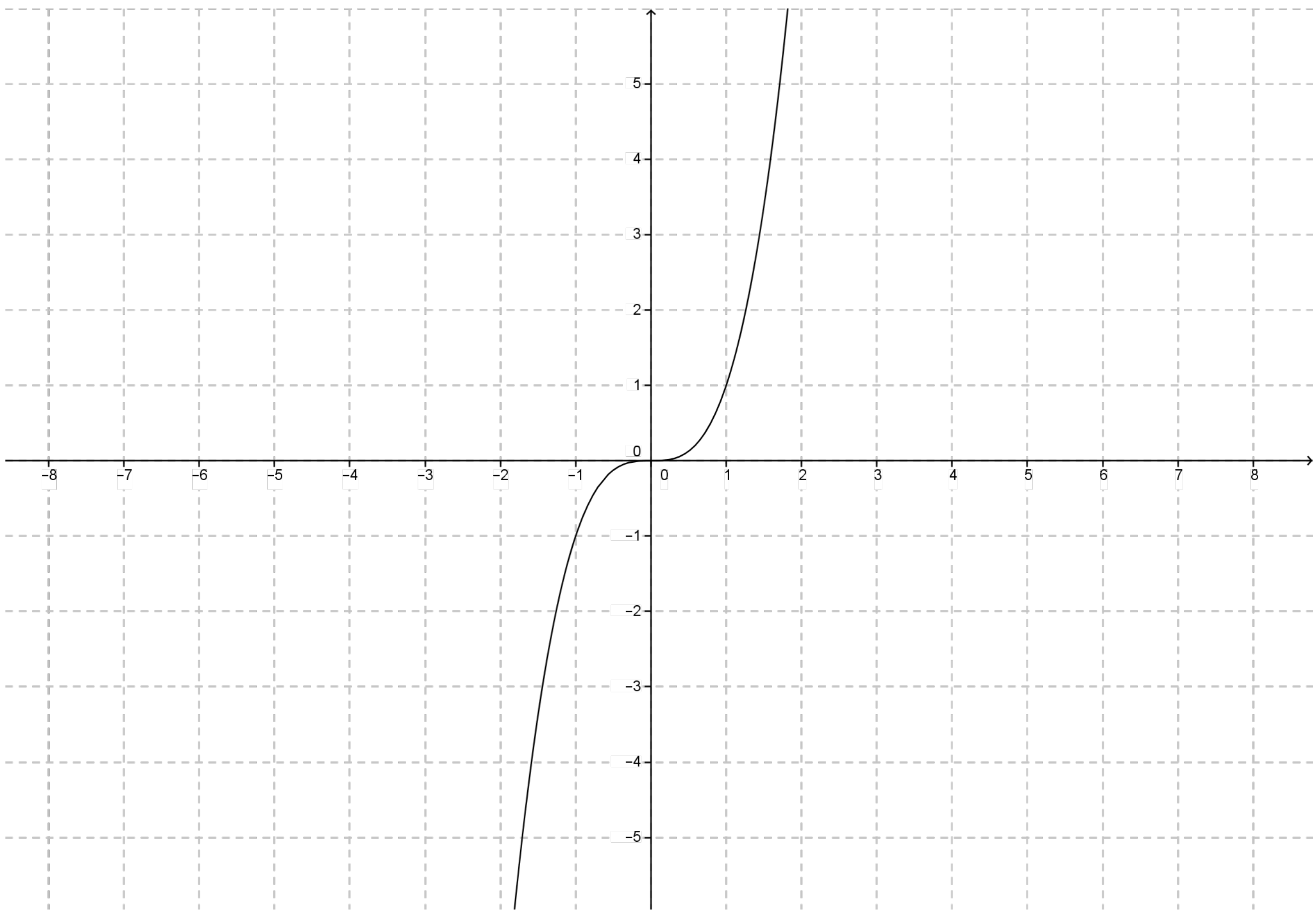
- **Tableau de variation de la fonction cube :**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- **Tableau de signe de la fonction cube :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

- **Représentation graphique de la fonction cube :**



4 Fonction racine carrée

Définition 8

La fonction racine carrée est définie par : $f : x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$

- **Ensemble de définition de la fonction racine carrée :**

La fonction racine carrée est définie sur : $[0;+\infty[$ ($\sqrt{x}$ n'est pas défini pour $x < 0$).

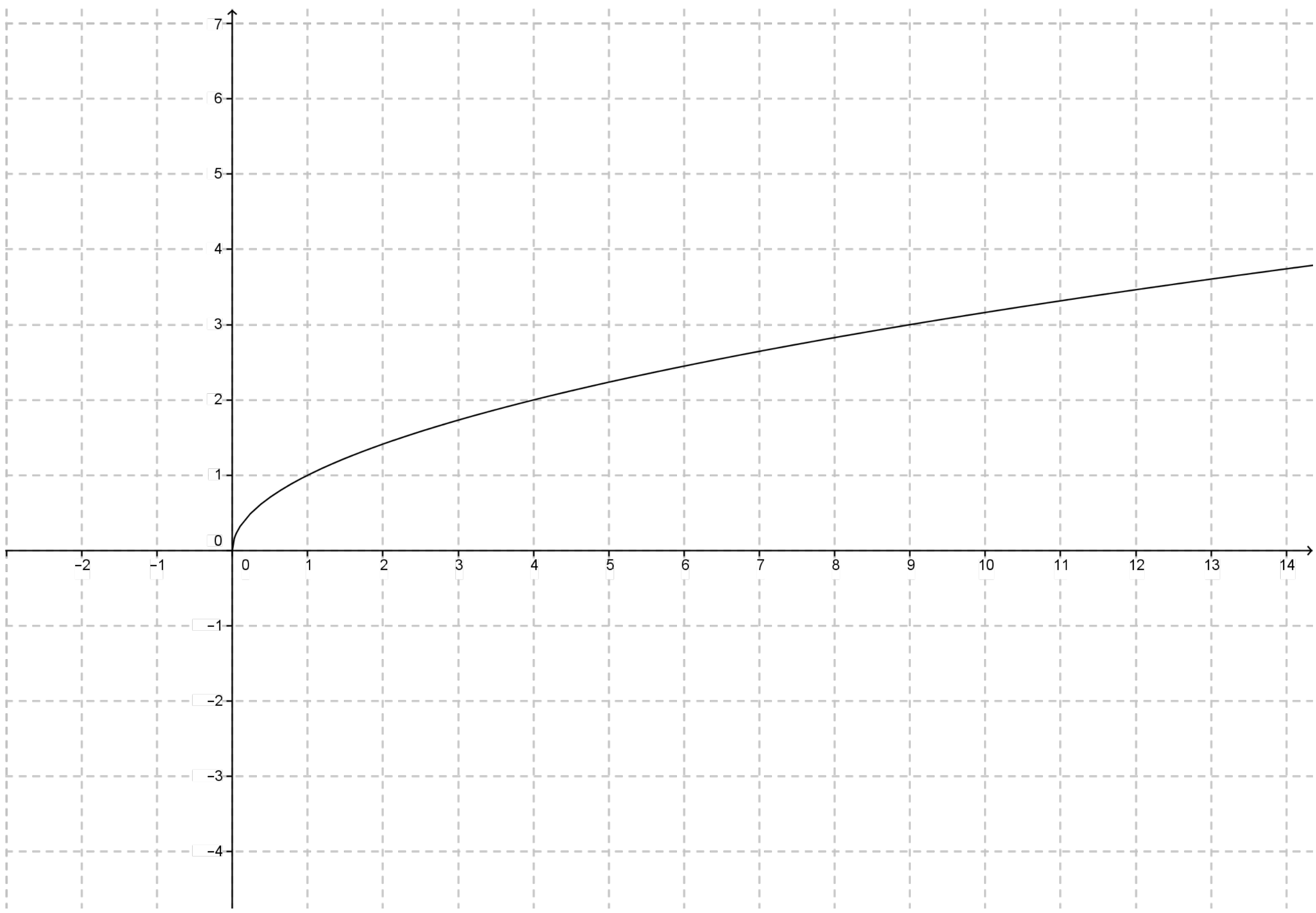
- **Tableau de variation de la fonction racine carrée :**

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

- **Tableau de signe de la fonction racine carrée :**

x	0	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	

- **Représentation graphique de la fonction racine carrée :**



5 Nombre dérivé en un point et Tangente en un point

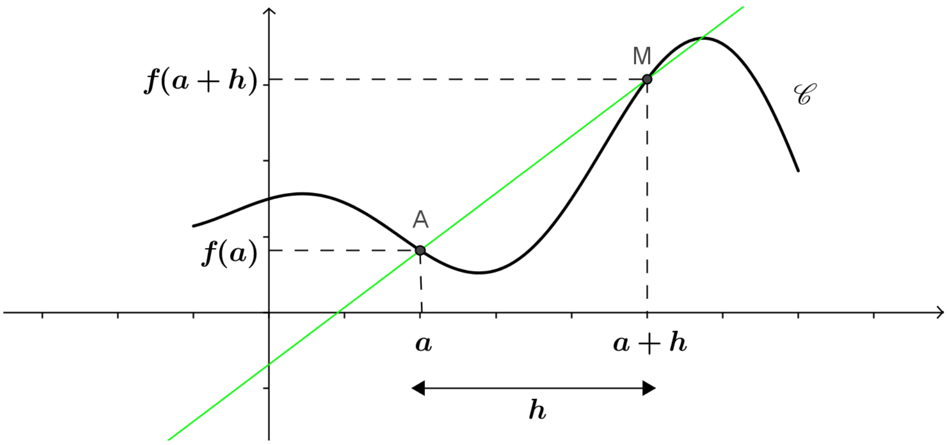
f est une fonction définie sur I. a et $a+h$ sont des nombres réels de I, avec $h \neq 0$.

5.1 Taux d'accroissement

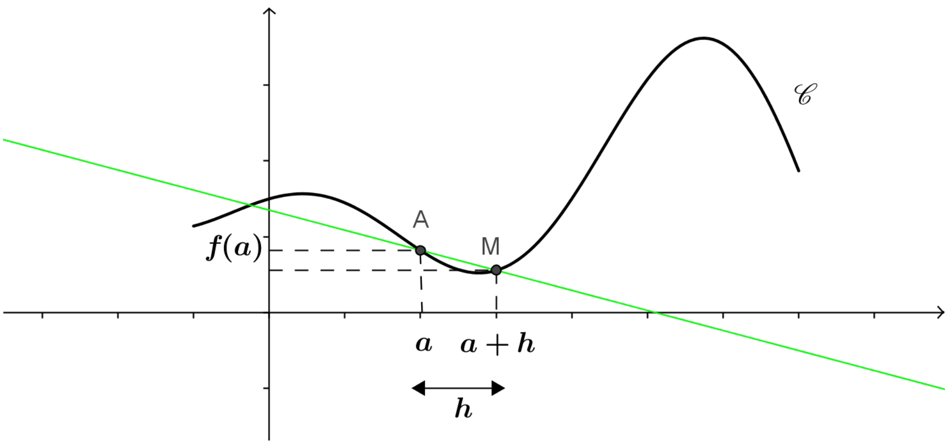
Définition 9 – Taux d'accroissement

Le taux d'accroissement de f entre a et $(a+h)$ est le rapport :

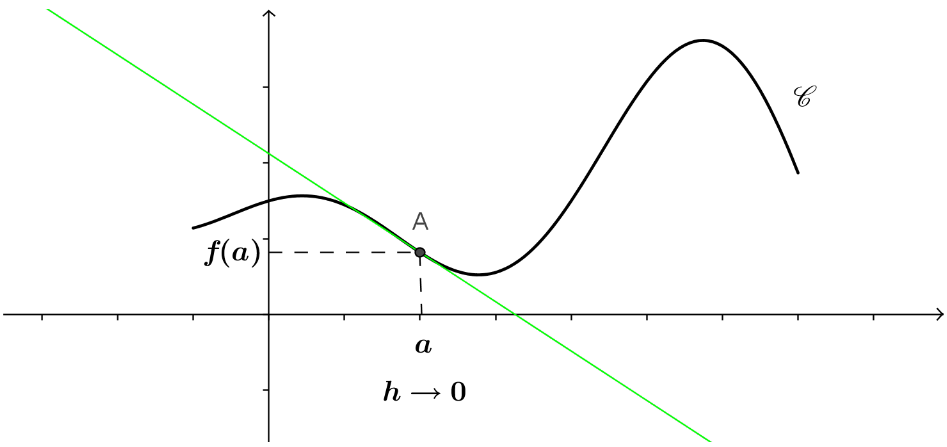
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Interprétation graphique : le taux d'accoissement de f est le coefficient directeur de la droite (AM).



Lorsque h tend vers zéro, la droite (AM) se confond avec la courbe à proximité du point A.



5.2 Nombre dérivé en a

Définition 10 – Nombre dérivé d'une fonction en a

La limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers zéro est appelé **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$.

On note :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

5.3 Tangente en a

Définition 11 – Tangente d'une fonction en a

La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f au point a est la droite qui passe par le point $A(a;f(a))$ et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente en a est $\quad y=f'(a)(x-a)+f(a)$.