Fonctions dérivées

Classe de Première ES - Lycée Saint-Charles

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr - 2013/2014

Objectifs :

- Connaître la notion de fonction dérivée.
- Connaître le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation.
- Connaître les fonctions dérivées des fonctions usuelles.
- Savoir dériver une somme, un produit, un quotient de deux fonctions.

1 Fonction dérivée

Rappel – La fonction f est **dérivable** en a signifie que le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers zéro. Ce réel est appelé nombre dérivé en a et est noté $f'(a)$.

Définition 1 – Fonction dérivée

Si la fonction f est dérivable sur un intervalle I, la fonction qui à chaque nombre réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

2 Signe de la dérivée et sens de variation

Propriété 1 – *admise*

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$,alors f est **croissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$,alors f est **décroissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$,alors f est **constante** sur I.

Application – Le tableau de variation d'une fonction peut se déduire du tableau de signe de sa fonction dérivée.

x	a		b		c		d
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$

3 Dérivées des fonctions usuelles

3.1 Fonctions constantes

$$\text{Si } f(x) = k, \text{ alors } f'(x) = 0$$

Preuve : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$

3.2 Fonction identité

$$\text{Si } f(x) = x, \text{ alors } f'(x) = 1$$

Preuve : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

3.3 Fonction carré

$$\text{Si } f(x) = x^2, \text{ alors } f'(x) = 2x$$

Preuve : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$
et $2a+h$ tend vers $2a$ lorsque h tend vers 0.

3.4 Fonction cube

$$\text{Si } f(x) = x^3, \text{ alors } f'(x) = 3x^2 \qquad (\textit{résultat admis})$$

3.5 Fonctions puissances

$$\text{Si } f(x) = x^n, \text{ alors } f'(x) = nx^{n-1} \qquad (\textit{résultat admis})$$

3.6 Fonction inverse

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{x}, \text{ alors } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Preuve : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}}{h} = \dfrac{a-(a+h)}{ha(a+h)} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$
et $-\dfrac{1}{a(a+h)}$ tend vers $-\dfrac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0.

3.7 Fonction racine carrée

$$\text{Si } f(x) = \sqrt{x}, \text{ alors } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\textit{résultat admis})$$

4 Dérivées et opérations sur les fonctions

Propriété 2 – dérivée d'une somme de deux fonctions

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction $u+v$ définie sur I par $(u+v)(x) = u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}\\ &= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}.\end{aligned}$$

Ce qui tend vers $u'(a)+v'(a)$ lorsque h tend vers 0.

Exemple : Si $f(x) = x^2 + x$, alors $f'(x) = 2x+1$

Propriété 3 – dérivée d'un produit de deux fonctions (*admis*)

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction uv définie sur I par $(uv)(x) = u(x)\times v(x)$ est dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Remarque – On déduit de la propriété précédente : $(ku)' = ku'$ (avec k réel) $(u^2)' = 2uu'$

Exemple : Si $f(x) = 3x(x^2+1)$, alors $f'(x) = 3\times(x^2+1) + 3x\times(2x) = 6x^2+3$

Propriété 4 – dérivée de l'inverse d'une fonction (*admis*)

v est une fonction dérivable sur un intervalle I et pour tout x de I, $v(x)\neq 0$.
La fonction $\frac{1}{v}$ définie sur I par $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Exemple : Si $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, alors $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Propriété 5 – dérivée d'un quotient de fonctions (*admis*)

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et pour tout x de I, $v(x)\neq 0$.
La fonction $\frac{u}{v}$ définie sur I par $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Exemple : Si $f(x) = \frac{2(x+3)}{x+1}$, alors $f'(x) = \frac{2(x+1)-2(x+3)}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2}$