

Puissances

Objectifs :

Savoir utiliser les notations a^n et a^{-n}

Savoir calculer avec des puissances de 10

Savoir écrire et calculer en notation scientifique

Activité de découverte (calculatrice autorisée)

Prendre une feuille de papier (son épaisseur est de l'ordre 0,1 mm).

Couper cette feuille en deux et superposer les deux parties obtenues.

Couper de nouveau en deux puis superposer... couper, superposer...

Imaginer que la feuille soit assez grande et que l'on dispose d'un massicot pour pouvoir couper de grosses épaisseurs de papier.

Quelle épaisseur totale de papier obtient-on quand on coupe vingt fois ?

I – Les notations a^n et a^{-n}

Définition :

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

En particulier :

$$a^1 = a \quad a^2 = a \times a \quad a^3 = a \times a \times a$$

Définition :

Pour tout nombre relatif a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n} .$$

En particulier :

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-2} = \frac{1}{a \times a} = \frac{1}{a^2}$$

Définition :

Pour tout nombre relatif a non nul, on écrit : $a^0 = 1$

II – Le signe des puissances

Propriété :

Pour tout nombre entier relatif n ,

- Si a est positif alors a^n est positif
- Si a est négatif alors a^n est positif lorsque l'exposant n est pair, et a^n est négatif lorsque l'exposant n est impair.

Exemple : Quels sont les signes de $A = 5^4$ $B = (-3)^4$ et $C = (-2)^{-5}$?

.....

.....

.....

.....

.....

Activité de consolidation (sans calculatrice)

Compléter les tableaux :

...	...	10^0	10^1	10^2	10^3	10^{\dots}
...	10	100	1 000
$\dots \times 10$	$\dots \times 10$	$\dots \times 10$	$\dots \times 10$	$10^1 \times 10$	$10^2 \times 10$	$\dots \times 10$	$\dots \times 10$	$\dots \times 10$
...	$\frac{10^2}{10}$	$\frac{10^3}{10}$	$\frac{10^{\dots}}{10}$	$\frac{10^{\dots}}{10}$		

...	2^1	2^2	2^3
...	2	4	8
$\dots \times 2$	$\dots \times 2$	$\dots \times 2$	$\dots \times 2$	$2^1 \times 2$	$2^2 \times 2$	$\dots \times 2$	$\dots \times 2$	$\dots \times 2$
...	$\frac{2^2}{2}$	$\frac{2^3}{2}$

Calculer :

$$2^2 \times 2^4 = 2^{\dots} = \dots$$

$$2^2 \times 2^{-2} = 2^{\dots} = \dots$$

$$\frac{2^2}{2^2} = 2^{\dots} = \dots$$

$$(-2)^2 = \dots$$

$$(-2)^3 = \dots$$

$$\frac{2^4}{2^2} = 2^{\dots} = \dots$$

$$10^3 = \dots$$

$$10^{-3} = \dots$$

$$(2^3)^2 = \dots$$

III – Multiplier par une puissance de 10

Propriété :

Pour tout nombre entier positif n :

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_n = \underbrace{10 \dots 0}_n ; \quad 10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_n \text{ et } 10^0 = 1 .$$

Multiplier un nombre par 10^n revient à décaler la virgule de n rangs vers la droite (on complète par des zéros si nécessaire).

Multiplier un nombre par 10^{-n} revient à décaler la virgule de n rangs vers la gauche (on complète par des zéros si nécessaire).

Remarque : **Multiplier** par 10^{-n} revient à **diviser** par 10^n .

Exemples :

$$208,641 \times 10^2 = \dots\dots\dots 37,1 \times 10^{-3} = \dots\dots\dots$$

IV – Multiplier ou diviser deux puissances de 10

Propriété :

Pour tous nombres entiers relatifs m et p : $10^m \times 10^p = 10^{m+p}$

Exemple :

$$A = 10^4 \times 10^3 = \dots\dots\dots$$

Propriété :

Pour tous nombres entiers relatifs m et p : $\frac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$

Exemple :

$$B = \frac{10^{-2}}{10^3} = \dots\dots\dots$$

Propriété :

Pour tous nombres entiers relatifs m et p : $(10^m)^p = 10^{m \times p}$

Exemple :

$$C = (10^2)^3 = \dots\dots\dots$$

V – La notation scientifique

Propriété :

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal supérieur ou égal à 1 et strictement inférieur à 10, et où n est un nombre entier relatif.

Exemples :

$$6\,430 = \dots\dots\dots 0,0643 = \dots\dots\dots$$

$$6\,430\,000 = \dots\dots\dots 6,43 \times 10^5 = \dots\dots\dots$$

VI – Calculer avec des puissances de 10

Méthode de calcul :

Dans un calcul ne comportant que des multiplications et divisions, on **regroupe** les nombres écrits sous la forme de **puissances de 10** d'un côté et **les autres nombres** de l'autre côté puis on calcule avec les règles habituelles.

Exemple :

$$B = \frac{5 \times 10^2 \times 9 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-6}} = \dots\dots\dots$$