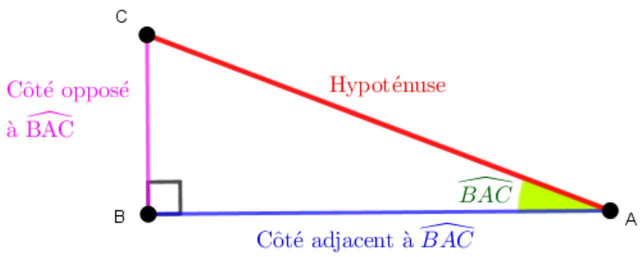
Trigonométrie dans le triangle rectangle

1 Introduction

La **trigonométrie** (du grec trígonos, « triangle », et métron, « mesure ») est la branche des mathématiques qui étudie les relations entre les grandeurs dans un triangle (**longueurs** et **angles**). Un triangle quelconque étant un assemblage de deux triangles rectangles, la trigonométrie commence par l'étude des **triangles rectangles**.

2 Rappels

Dans le triangle ABC rectangle en B :



- Le côté $[AC]$ est le côté le plus long, c'est l'**hypoténuse** du triangle.
- Le côté $[AB]$ est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{BAC}$.
- Le côté $[BC]$ est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{BAC}$.
- $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 90°$ (les deux angles aigus sont complémentaires).

Remarque :

- Le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{BAC}$ est aussi le **côté opposé** à l'angle $\widehat{BCA}$.
- Le **côté opposé** à l'angle $\widehat{BAC}$ est aussi le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{BCA}$.

3 Cosinus d'un angle aigu

Définition 1

Dans un triangle rectangle : **Cosinus** d'un angle aigu $= \dfrac{\text{longueur du } \textbf{côté adjacent} \text{ à l'angle}}{\text{longueur de l'} \textbf{hypoténuse}}$

Exemple. Dans le triangle ABC rectangle en B : $cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB}{AC}$ $\quad cos(\widehat{BCA}) = \dfrac{BC}{AC}$

4 Sinus d'un angle aigu

Définition 2

Dans un triangle rectangle : **Sinus** d'un angle aigu $= \dfrac{\text{longueur du } \textbf{côté opposé} \text{ à l'angle}}{\text{longueur de l'} \textbf{hypoténuse}}$

Exemple. Dans le triangle ABC rectangle en B : $sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AC}$ $\quad sin(\widehat{BCA}) = \dfrac{AB}{AC}$

Remarque : $sin(\widehat{BAC}) = cos(\widehat{BCA})$

5 Tangente d'un angle aigu

Définition 3

Dans un triangle rectangle : **Tangente** d'un angle aigu $=$ $\dfrac{\text{longueur du \textbf{côté opposé} à l'angle}}{\text{longueur du \textbf{côté adjacent} à l'angle}}$

Exemple. Dans le triangle ABC rectangle en B : $tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AB}$ $\quad tan(\widehat{BCA}) = \dfrac{AB}{BC}$

Propriété : $tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{sin(\widehat{BAC})}{cos(\widehat{BAC})}$ **Preuve** : $tan(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BC \div AC}{AB \div AC} = \dfrac{sin(\widehat{BAC})}{cos(\widehat{BAC})}$

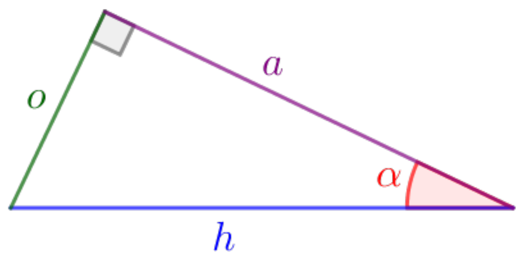
6 Propriété des rapports trigonométriques

Propriété 1

Dans un triangle rectangle, quelle que soit la mesure α d'un angle aigu, on a :

$$sin(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1$$

Preuve : on utilise le théorème de Pythagore.
Dans le triangle rectangle ci-dessous, d'après le théorème de Pythagore : $o^2 + a^2 = h^2$.



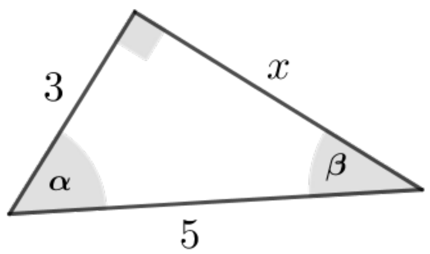
$$sin(\alpha) = \frac{o}{h} \qquad cos(\alpha) = \frac{a}{h}$$

$$sin(\alpha)^2 = \left(\frac{o}{h}\right)^2 = \frac{o^2}{h^2} \qquad cos(\alpha)^2 = \left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{a^2}{h^2}$$

$$sin(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = \frac{o^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{o^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1 \qquad CQFD$$

7 Calculs d'angles et de longueurs dans un triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, grâce aux relations trigonométriques, **la connaissance de 2 grandeurs suffit pour calculer toutes les autres**.
Dans le triangle rectangle ci-dessous on connait la longueur de l'hypoténuse et la longueur d'un côté de l'angle droit. Il reste donc à calculer la longueur manquante x et les angles α et β.



$sin(\beta) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{3}{5}$ La touche **arcsin** de la calculatrice permet de calculer $\beta \approx 36,87°$.

Comme la somme des angles aigus est égale à $90°$, on en déduit $\alpha \approx 53,13°$.

Pour calculer x on peut utiliser le théorème de Pythagore : $x^2 = 5^2 - 3^2$, doù $x = 4$.

Remarque : pour démarrer on pouvait écrire $cos(\alpha) = \dfrac{3}{5}$ et utiliser la touche **arccos** de la calculatrice.