# Les bases du calcul numérique

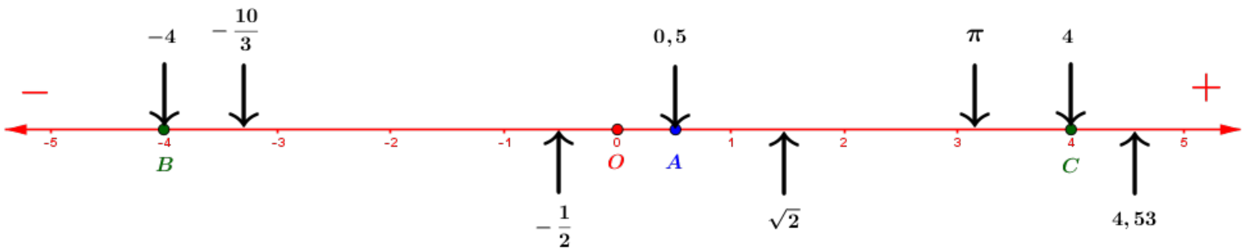
**Classe de troisième**

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr

## 1 Représentation des nombres

**Définition 1 – Abscisse d'un point**

Un nombre peut être représenté par un point sur une droite graduée. La position du point par rapport à l'origine (la graduation 0) est appelée l'abscisse du point.




Sur le graphique ci-dessus, l'abscisse du point A est $0,5$. l'abscisse de B est $-4$, l'abscisse de C est 4.
4 et $-4$ sont des **nombres opposés** (leur somme est égale à 0).

## 2 Addition, Soustraction, Multiplication, Division

Les propriétés ci-dessous sont les règles de base du calcul numérique. Elles doivent être maîtrisées. En cas de doute pour calculer $(-2)+(-3)$ ou $-2-(-3)$, on peut utiliser une calculatrice, mais il ne faut pas oublier que **sur une calculatrice, un nombre négatif doit toujours être placé entre parenthèses**.
Par exemple : $(-2)\times(-2) = (-2)^2 \neq -2^2$.

**Propriété 1**

Soit deux nombres $a$ et $b$ :

- **Si** $a = 0$ ou $b = 0$, **alors** $ab = 0$.
- **Si** $ab = 0$ **alors** $a = 0$ ou $b = 0$.
- **Si** $a$ et $b$ sont positifs, **alors** $ab$ et $\frac{a}{b}$ sont positifs.
- **Si** $a$ et $b$ sont de signes contraires, **alors** $ab$ et $\frac{a}{b}$ sont négatifs.
- Un produit (ou un quotient), est négatif si et seulement si le nombre de facteurs négatifs est impair (et si aucun facteur n'est nul).
- **Si** $a$ et $b$ sont positifs, **alors** $a+b$ est positif.
- **Si** $a$ et $b$ sont négatifs, **alors** $a+b$ est négatif.
- **Si** $a$ et $b$ sont de signes contraires, **alors** $a+b$ a le signe du terme dont la valeur absolue est la plus grande.
- Pour calculer $a-b$, il faut écrire $a-b = a+(-b)$ et utiliser les règles précédentes.

Rappel : $ab = a\times b$ $\quad \frac{a}{b} = a \div b$ $\quad a-(+b) = a+(-b)$.

## 3 Puissances d'un nombre

**Définition 2 – Ecriture $a^n$ et $a^{-n}$**

L'expression $a^n$ se lit « $a$ à la puissance $n$» ou « $a$ puissance $n$ ». Dans cette expression $n$ est appelé l'**exposant**.
Soit $a$ un nombre quelconque et $n$ un nombre entier positif :

- **Si** $a \neq 0$ **alors** $a^0 = 1$.
- $a^1 = a$.
- **Si** $n > 1$, **alors** $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n \text{ fois}}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

**Exemple :**
$4^0 = 1$ $\quad 4^1 = 4$ $\quad 4^2 = 4 \times 4 = 16$ $\quad 4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ $\quad 4^{-1} = \dfrac{1}{4^1} = \dfrac{1}{4}$ $\quad 4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

**Propriété 2 – Règles de calcul avec les puissances**

$a$ et $b$ sont deux nombres quelconques, $m$ et $n$ sont deux entiers relatifs.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^m b^m = (ab)^m$

**Exemple :**
$4^5 \times 4^3 = 4^8$ $\quad \dfrac{4^5}{4^3} = 4^2$ $\quad \dfrac{4^3}{4^5} = 4^{-2} = \dfrac{1}{4^2}$ $\quad \left(4^5\right)^3 = 4^{15}$ $\quad \left(4^2 \times 4^3\right)^4 = \left(4^5\right)^4 = 4^{20}$ $\quad 3^5 \times 4^5 = 12^5$

## 4 Nombres entiers

Un nombre entier est soit négatif, soit positif, soit nul (0 est un nombre entier ni négatif, ni positif).
Deux nombres entiers qui se suivent sont consécutifs (par exemple $-4$ et $-3$ sont deux entiers consécutifs).

**Propriété 3**

La **somme**, la **différence** et le **produit** de deux nombres entiers est toujours un nombre entier.

**Propriété 4**

Le **quotient** de deux nombres entiers peut être ou ne pas être un nombre entier.

**Exemple :** $8 \div 2$ est entier alors que $86 \div 10$ n'est pas entier. $86 \div 10 = \dfrac{86}{10} = 8,6$.

$8 \div 2$ est entier car **8 est divisible par 2**, on dit aussi que **2 est un diviseur de 8** ou encore que **8 est un multiple de 2**.

**Propriété 5 – (*propriété admise*)**

Tout nombre entier possède un nombre fini de diviseurs et un nombre infini de multiples.

**Exemple :** L'ensemble des diviseurs de 12 est $\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Quelques multiples de 12 : $-48, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48$.

**Définition 3 – Nombres premiers**

Un entier positif qui, comme 7, possède exactement deux diviseurs (1 et lui-même) est appelé **nombre premier**.

On démontre qu'**il existe une infinité de nombres premiers** : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...
Attention : **1 n'est pas un nombre premier**.

**Propriété 6 – (*propriété admise*)**

Un nombre entier supérieur à 1 et non premier peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.

**Exemple :** $180 = 18 \times 10 = (9 \times 2) \times (5 \times 2) = 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2$.
Qui peut s'écrire plus simplement : $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

# 5 Carré et Racine carrée

Les puissances de 2 sont très utilisées au collège et au lycée. « $a^2$ » se lit « $a$ puissance 2 » ou « $a$ au carré ».
On retrouve les « carrés » dans de nombreuses formules :

- $A = c^2$ (l'aire d'un carré).
- $A = \pi r^2$ (l'aire d'un cercle).
- $a^2 + b^2 = c^2$ (théorème de Pythagore).

**Définition 4 – Carrés parfaits**

Le carré d'un nombre entier est appelé « carré parfait ».
Repérer un carré parfait peut être très utile :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 |

Les nombres, 5 et $-5$, sont les solutions de l'équation $x^2 = 25$. En effet, $5^2 = (-5)^2 = 25$. La solution positive, 5, est appelée racine carrée de 25 et est notée avec le symbole $\sqrt{25}$.
Chaque carré parfait possède une racine carrée entière : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{169} = 13$.
Chaque nombre positif possède une racine carrée, qui peut être calculée à l'aide d'une calculatrice.

**Définition 5 – Racine carrée**

Pour tout nombre positif $a$, il existe un unique nombre positif $b$ tel que $b^2 = a$. Ce nombre $b$ est appelé racine carrée de $a$ et s'écrit $\sqrt{a}$. Ainsi, pour tout nombre positif $a$, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

**Exemple :**

- Si l'aire d'un carré est 6 cm$^2$, alors son côté est égal à $\sqrt{6}$ cm.
- Si l'aire d'un cercle est 5 cm$^2$, alors son rayon est égal à $\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}$ cm.
- Si le côté d'un carré est égal à 1 cm, alors sa diagonale est égale à $\sqrt{2}$ cm (théorème de Pythagore).