1 La notion de PROPOSITION

Définition 1

Une ***proposition*** est une affirmation qui peut prendre deux valeurs logiques : VRAI ou FAUX.

Une proposition est aussi parfois appelée une *affirmation* ou une *assertion.*

Quelques propositions :

1. « Il neige en ce moment à Chicago »
2. « Tout carré d'entier relatif est supérieur ou égal à 1 »
3. « $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel »
4. « $\sqrt{x} \geqslant 1$ »
5. « Dieu existe ! »
6. « Par deux points il ne passe qu'une seule droite »
7. « Tout entier pair est somme de deux nombres premiers » (Conjecture de Goldbach 1670-1764)
8. « $1+1=3$ »
9. « Je suis un menteur »

Il existe donc plusieurs types de propositions :

1. Des propositions qui sont fausses ou vraies de façon évidente. (8)
2. Des propositions que l'on accepte comme vraies (les axiomes de base). (6)
3. Des propositions dont la valeur logique, vraie ou fausse, peut être prouvée à l'aide d'une démonstration. (2, 3)
4. Des propositions pour lesquelles nos connaissances sont insuffisantes pour répondre. (1, 4)
5. Des propositions invérifiables. (5, 7 ?)
6. Des propositions qui ne peuvent être ni vraies, ni fausses. (9)

Remarque. Pour exprimer qu'une proposition A est vraie, on dira tout simplement : « on a A » . (« on a $1+1=2$ » signifie « la proposition $1+1=2$ est vraie »)

2 PRINCIPE DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques sont construites à partir de ***définitions*** (point, segment, parallélisme, cercle, nombres entiers, nombres rationnels, nombres relatifs, ...) et d'un petit nombre de ***propositions*** que l'on accepte comme vraies (les ***axiomes***). On construit alors de nouvelles propositions que l'on prouve être soit vraies soit fausses, à l'aide d'une ***démonstration***. Les démonstrations reposent sur des règles de ***logique***.

En géométrie euclidienne, on définit entre autre les notions de point, de segment et de parallélisme et on pose 5 axiomes de base (les **axiomes d'Euclide**) :

1. Tout segment peut se prolonger indéfiniment des deux côtés.
2. Par deux points il ne passe qu'une seule droite.
3. Par un point du plan, il ne passe qu'une seule droite parallèle à une autre.
4. Tous les angles droits ont la même mesure.
5. Pour tout segment $[AB]$ il existe un cercle de centre A passant par B.

3 Savoir RAISONNER : quelques techniques de démonstration

- **Utilisation d'un théorème** :

  Définition 2 – Théorème

  Un ***théorème*** est une proposition mathématique VRAIE qui se présente sous forme d'une implication : si A est VRAIE alors B l'est aussi (en notation mathématiques : « $A \Rightarrow B$ »).

  A correspond aux **hypothèses** du théorème, B correspond à la **conclusion** du théorème. Si les hypothèses A sont vérifiées alors la proposition B est vraie.
  N'oubliez pas de citer le nom des théorèmes que vous utilisez ! ! !

- **Démonstration par l'absurde** : On suppose le contraire de ce que l'on souhaite démontrer et on cherche à aboutir à une absurdité ou une contradiction.

- **Utilisation d'un contre-exemple** : Un contre-exemple est souvent la méthode la plus efficace pour prouver qu'une proposition est FAUSSE.

- **Démonstration par disjonction de cas** : On montrer que l'énoncé se ramène à un nombre fini de cas, puis on les démontre séparément.

- **Démonstration par récurrence**.

- **...**

  Une proposition mathématique dont on ignore la valeur de vérité est une **conjecture**. Une fois prouvée, une conjecture devient un théorème.

4 Savoir CHERCHER : quelques éléments de réflexion

Savoir chercher, c'est accepter de ne pas trouver du premier coup et avoir la patience de recommencer.

- **Lire attentivement l'énoncé** : il faut prendre le temps de bien comprendre la question posée, ni plus ni moins. Chaque mot a son importance. On peut aussi chercher à reformuler la question.

- **Faire des essais avec des valeurs particulières** : pour bien comprendre la nature du problème, d'un algorithme, observer les résultats et essayer d'en déduire des conjectures.

- **Savoir utiliser la calculatrice, un logiciel de calcul formel, un tableur, un logiciel de géométrie dynamique, un logiciel de programmation d'algorithmes ...**

- **... savoir se passer de la calculatrice** : souvent, la décomposition des calculs à la main permet de faire avancer la réflexion. Faire des schémas permet aussi d'établir des connections, invisibles avec une calculatrice.

- **Faire des conjectures** : quand une conjecture est faite il faut chercher à la démontrer ou à l'invalider.

Faire des mathématiques c'est savoir **RAISONNER**, savoir **CHERCHER** et savoir **CALCULER**. C'set aussi savoir **MODELISER** un problème, savoir **PRESENTER** ses recherches et savoir **COMMUNIQUER** ses résultats.