Fonctions affines

Classe de seconde

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr

1 Définition

Définition 1 – Fonction affine

On appelle **fonction affine** une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont des nombres réels fixés.

Exemple : $h : x \longmapsto 4x + 1$ est une fonction affine avec $a = 4$ et $b = 1$.

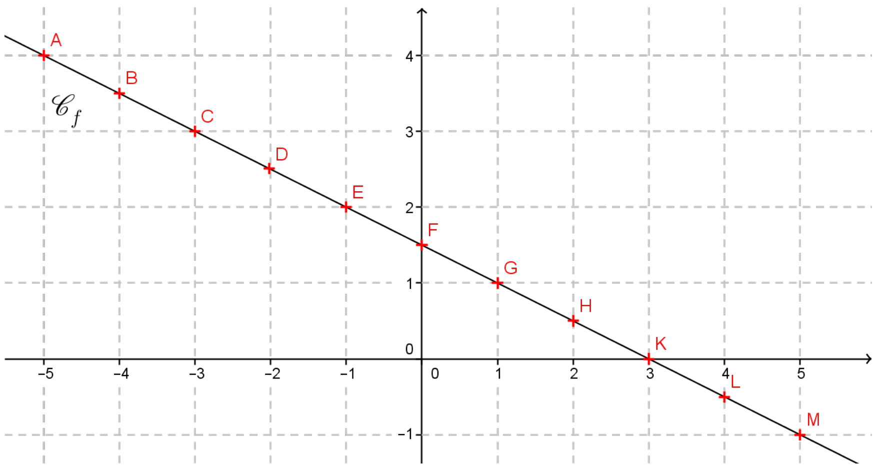
Remarque 1 : Les **fonctions linéaires** $x \longmapsto ax$ sont affines avec $b = 0$.

Remarque 2 : Les **fonctions constantes** $x \longmapsto b$ sont affines avec $a = 0$.

2 Courbe représentative

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, on peut dresser le tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4	$3,5$	3	$2,5$	2	$1,5$	1	$0,5$	0	$-0,5$	-1	$-1,5$



Propriété 1 – Courbe représentative d'une fonction affine

Si f est une **fonction affine** alors sa courbe représentative est une **droite**.
Inversement, si la courbe représentative d'une fonction est une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées) alors cette fonction est affine.

Remarque 3 : La connaissance des coordonnées de deux points suffit pour tracer la droite $\mathscr{C}_f$.

Définition 2 – ordonnée à l'origine

Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$.
On a $f(0) = b$.
b est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite représentative de f.

Définition 3 – coefficient directeur

Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$.
a est appelé **coefficient directeur** (ou **pente**) de la droite représentative de f.

3 Sens de variation

Propriété 2 – sens de variation d'une fonction affine

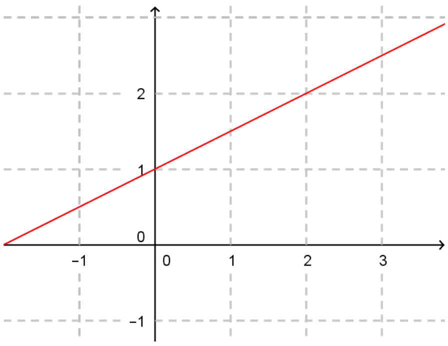
Soit f est une **fonction affine** avec $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$ alors f est croissante.
- Si $a = 0$ alors f est constante.
- Si $a < 0$ alors f est décroissante.

Preuve : On regarde dans quel ordre sont classées les images.

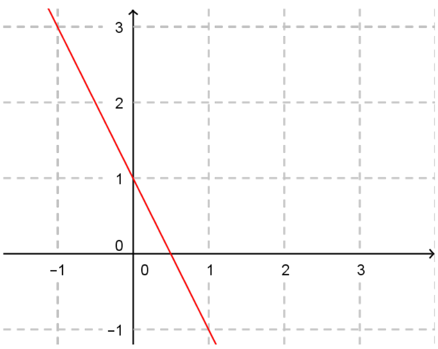
- Si $a > 0$ et $x_1 > x_2$ alors $ax_1 > ax_2$. On en déduit $ax_1 + b > ax_2 + b$
Les images de f sont classées dans le même ordre que les antécédents : f est croissante.
- Si $a < 0$ et $x_1 > x_2$ alors $ax_1 < ax_2$. On en déduit $ax_1 + b < ax_2 + b$
Les images de f sont classées dans l'ordre inverse des antécédents : f est décroissante.
- Si $a = 0$ alors $f(x) = b$: f est constante.

Exemple : $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x + 1$ est une fonction croissante avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 1$.



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

Exemple : $h : x \longmapsto -2x + 1$ est une fonction décroissante avec $a = -2$ et $b = 1$.



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$\searrow$

4 Tableau de signes

Propriété 3

Soit f une **fonction affine** avec $f(x) = ax + b$.
La fonction f s'annule pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

Preuve : $x = -\dfrac{b}{a}$ est la solution de l'équation $f(x) = 0$.

On en déduit les tableaux de signe :

Si $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $f(x) = ax + b$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $f(x) = ax + b$		$+$	0	$-$	

Exemple : $h : x \longmapsto -\dfrac{x}{2} + 1$ est une fonction affine avec $a = -0,5$ et $b = 1$.

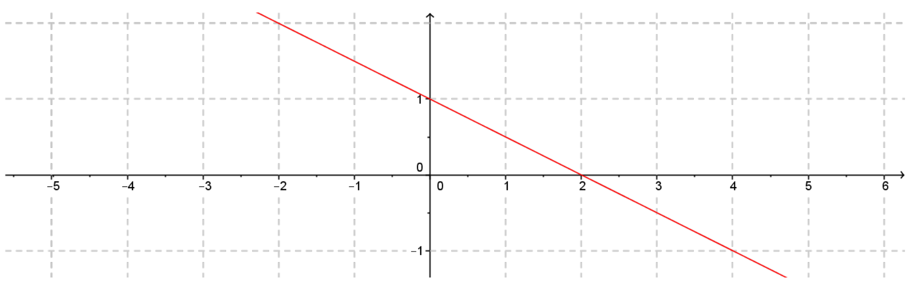
$a < 0$ donc h est décroissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		$\searrow$	

$-\dfrac{b}{a} = 2$ donc $h(2) = 0$

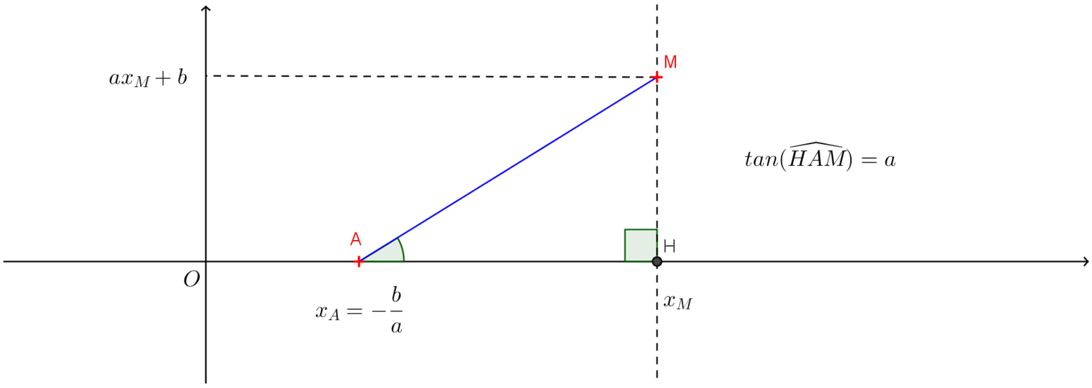
x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	

$b = 1$ donc $h(0) = 1$.



Preuve de la propriété 1

Preuve (direct) : Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ et $a \neq 0$.
Soit $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.
Soit $A(x_A; 0)$ le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
Soit $M(x_M; f(x_M))$ un point quelconque de $\mathscr{C}_f$.
Soit $H(x_M; 0)$.

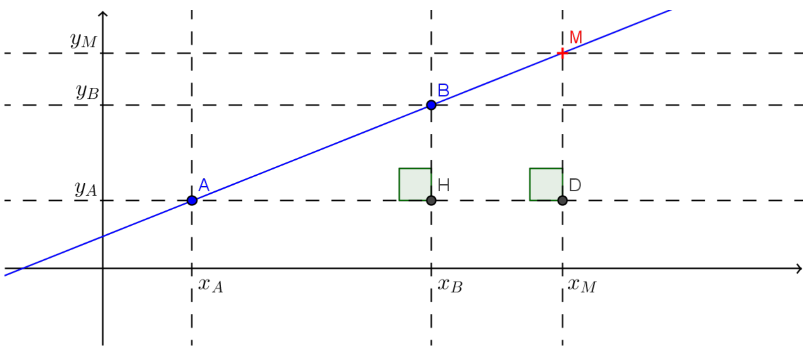


$ax_A + b = 0$ donc $x_A = -\dfrac{b}{a}$

Dans le triangle rectangle HAM, on a : $\tan(\widehat{HAM}) = \dfrac{HM}{HA} = \dfrac{ax_M + b}{x_M + \dfrac{b}{a}} = \dfrac{a\left(x_M + \dfrac{b}{a}\right)}{x_M + \dfrac{b}{a}} = a$

On en déduit que l'angle $\widehat{OAM}$ est constant quel que soit x_M. Par conséquent, tous les points de $\mathscr{C}_f$ sont sur la droite (AM). CQFD

Preuve (réciproque) : On suppose le repère $(O; I; J)$ orthonormé.
Soit une fonction f représentée dans ce repère par une droite (AB)
Soit $M(x_M; y_M)$ un point quelconque de cette droite.
Soit le point H tel que BAH soit rectangle en H et le point D tel que MAD soit rectangle en D.



D'après le Théorème de Thalès on a : $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{MD}{BH}$.

On en déduit : $MD = AD \times \dfrac{BH}{AH}$.

Par conséquent : $y_M - y_A = (x_M - x_A) \times \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

En posant $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, on obtient : $y_M = ax_M - ax_A + y_A$.

En posant $b = -ax_A + y_A$ on obtient : $y_M = ax_M + b$. CQFD