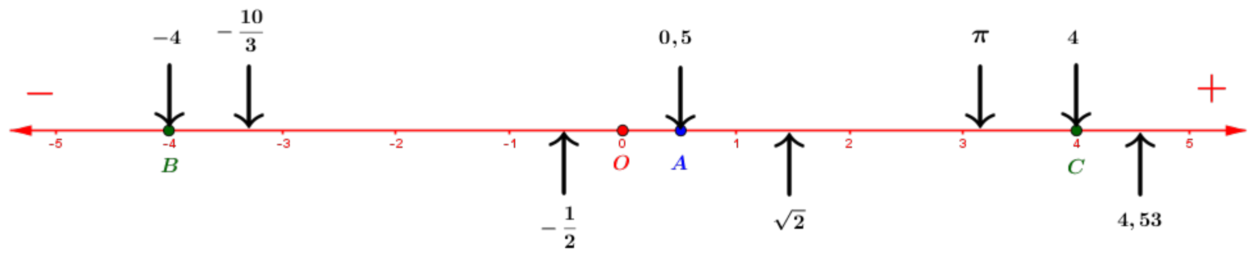
Les bases du calcul numérique

(Révisions de collège)

Patrice Jacquet - www.mathxy.fr

1 Représentation des nombres

> **Définition 1 – Abscisse d'un point**
> Un nombre peut être représenté par un point sur une droite graduée. La position du point par rapport à l'origine (la graduation 0) est appelée l'abscisse du point.



Sur ce graphique, l'abscisse du point A est $0,5$, l'abscisse du point B est -4, l'abscisse du point C est 4.

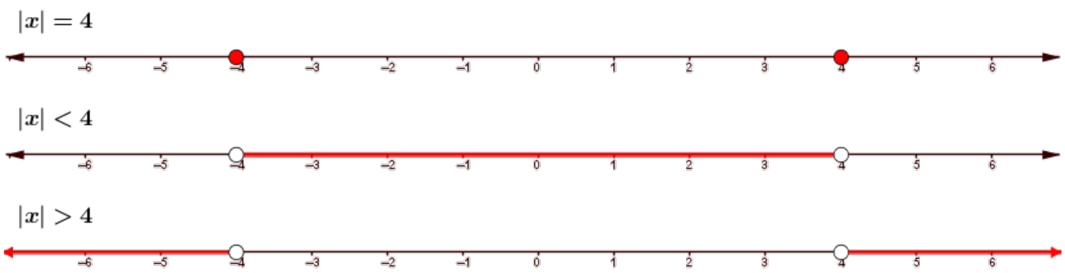
> **Définition 2 – Valeur absolue d'un nombre**
> La valeur absolue d'un nombre a, notée $|a|$, est la distance entre le point d'abscisse a et le point d'abscisse 0, sur la droite graduée. Une valeur absolue est toujours positive.

Exemple : Les nombres 4 et -4 ont pour valeur absolue 4. On peut aussi écrire : $|4| = |-4| = 4$.

> **Propriété 1**
> Soit b un nombre positif :
>
> - **Si** $|x| = b$ **alors** $x = b$ ou $x = -b$.
> - **Si** $|x| < b$ **alors** $-b < x < b$.
> - **Si** $|x| > b$ **alors** $x < -b$ ou $x > b$.

Preuve (sur un exemple) :
Si $|x| = 4$ **alors** $x = 4$ ou $x = -4$. **Si** $|x| < 4$ **alors** $-4 < x < 4$. **Si** $|x| > 4$ **alors** $x < -4$ ou $x > 4$.

Cet exemple est représenté graphiquement ci dessous :



2 Addition, Soustraction, Multiplication, Division

Les propriétés ci-dessous sont les règles de base du calcul numérique. Elles doivent être maîtrisées. En cas de doute pour calculer $(-2)+(-3)$ ou $-2-(-3)$, on peut utiliser une calculatrice, mais il ne faut pas oublier que **sur une calculatrice, un nombre négatif doit toujours être placé entre parenthèses**.
Par exemple : $(-2)\times(-2)=(-2)^2 \neq -2^2$.

Propriété 2 – (*propriétés démontrées au collège*)

Soit deux nombres a et b :

- **Si** $a=0$ ou $b=0$, **alors** $ab=0$.
- **Si** $ab=0$ **alors** $a=0$ ou $b=0$.
- **Si** a et b sont positifs, **alors** ab et $\frac{a}{b}$ sont positifs.
- **Si** a et b sont de signes contraires, **alors** ab et $\frac{a}{b}$ sont négatifs.
- Un produit (ou un quotient), est négatif si et seulement si le nombre de facteurs négatifs est impair (et si aucun facteur n'est nul).
- **Si** a et b sont positifs, **alors** $a+b$ est positif.
- **Si** a et b sont négatifs, **alors** $a+b$ est négatif.
- **Si** a et b sont de signes contraires, **alors** $a+b$ a le signe du terme dont la valeur absolue est la plus grande.
- Pour calculer $a-b$, il faut écrire $a-b=a+(-b)$ et utiliser les règles précédentes.

Rappel d'écriture : $ab=a\times b$ $\quad \frac{a}{b}=a\div b$ $\quad a-(+b)=a+(-b)$.

3 Nombres entiers

L'ensemble $\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ est l'ensemble des nombres entiers. Un nombre entier est soit négatif, soit positif, soit nul (0 est un nombre entier ni négatif, ni positif).
Deux nombres entiers qui se suivent sont consécutifs (par exemple -4 et -3 sont deux entiers consécutifs).

Propriété 3 – (*propriété évidente*)

La **somme**, la **différence** et le **produit** de deux nombres entiers est toujours un nombre entier.

Propriété 4

Le **quotient** de deux nombres entiers peut être ou ne pas être un nombre entier.

Preuve : $8\div 2$ est entier alors que $86\div 10$ n'est pas entier.
Le quotient $86\div 10$ peut être exprimé par la fraction $\frac{86}{10}$ ou par le nombre décimal $8,6$.

Dans l'exemple ci dessus : $8\div 2$ est entier car **8 est divisible par 2**, on dit aussi que **2 est un diviseur de 8** ou encore que **8 est un multiple de 2**. Le reste de la division euclidienne de 8 par 2 est égal à 0 : $8=2\times4+0$.

$86\div 10$ n'est pas entier car le reste de la division euclidienne de 86 par 10 n'est pas nul : $86=10\times 8+6$.

Propriété 5 – (*propriété admise*)

Tout nombre entier possède un nombre fini de diviseurs et un nombre infini de multiples.

Exemple : L'ensemble des diviseurs de 12 est $\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Quelques multiples de 12 : $-48, -36, -24, -12, 0, 12, 24, 36, 48$.

Propriété 6 – (*propriété admise*)

1 est le seul diviseur positif de 1. Chaque autre entier positif possède au moins 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple : 12 est divisible par 1 , 2 , 3 , 4 , 6 et 12 7 est divisible seulement par 1 et 7.

Définition 3 – Nombres premiers

Un entier positif qui, comme 7, possède exactement deux diviseurs (1 et lui-même) est appelé **nombre premier**.

On démontre qu'**il existe une infinité de nombres premiers** : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...
Attention : **1 n'est pas un nombre premier**.

Propriété 7 – (*propriété admise*)

Un nombre entier supérieur à 1 et non premier peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemple : $180 = 18 \times 10 = (9 \times 2) \times (5 \times 2) = 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2$.
Qui peut s'écrire plus simplement : $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

4 Puissances d'un nombre

Définition 4 – Ecriture a^n et a^{-n}

L'expression a^n se lit « a à la puissance n» ou « a puissance n ».
Dans cette expression n est appelé l'**exposant**.
Soit a un nombre quelconque et n un nombre entier positif :

- **Si** $a \neq 0$ **alors** $a^0 = 1$.
- $a^1 = a$.
- **Si** $n > 1$, **alors** $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n \text{ fois}}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exemple :

$4^0 = 1$ $4^1 = 4$ $4^2 = 4 \times 4 = 16$ $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ $4^{-1} = \dfrac{1}{4^1} = \dfrac{1}{4}$ $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

Propriété 8 – Règles de calcul avec les puissances

a et b sont deux nombres quelconques, m et n sont deux entiers relatifs.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^m b^m = (ab)^m$

Exemple :

$4^5 \times 4^3 = 4^8$ $\dfrac{4^5}{4^3} = 4^2$ $\dfrac{4^3}{4^5} = 4^{-2} = \dfrac{1}{4^2}$ $\left(4^5\right)^3 = 4^{15}$ $\left(4^2 \times 4^3\right)^4 = \left(4^5\right)^4 = 4^{20}$ $3^5 \times 4^5 = 12^5$

5 Carré et Racine carrée

Les puissances de 2 sont très utilisées au collège et au lycée. « a^2 » se lit « a puissance 2 » ou « a au carré ». On retrouve les « carrés » dans de nombreuses formules :

- $A = c^2$ (l'aire d'un carré).
- $A = \pi r^2$ (l'aire d'un cercle).
- $a^2 + b^2 = c^2$ (théorème de Pythagore).
- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (factorisation de la différence de deux carrés).

Définition 5 – Carrés parfaits

Le carré d'un nombre entier est appelé « carré parfait ».
Repérer un carré parfait peut être très utile :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

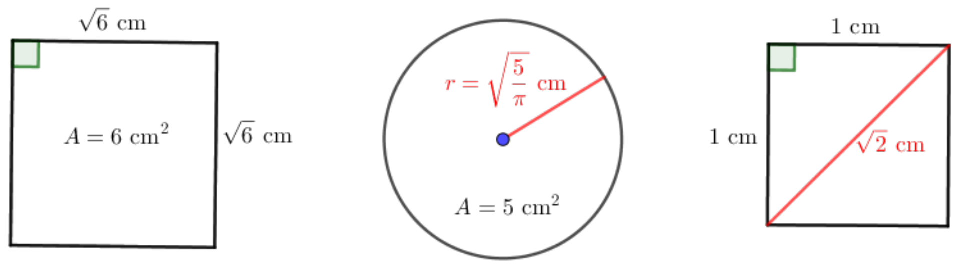
Les nombres, 5 et -5, sont les solutions de l'équation $x^2 = 25$. En effet, $5^2 = (-5)^2 = 25$.
La solution positive, 5, est appelée racine carrée de 25 et est notée avec le symbole $\sqrt{25}$.
Chaque carré parfait possède une racine carrée entière : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{169} = 13$.
Chaque nombre positif possède une racine carrée, qui peut être calculée à l'aide d'une calculatrice.

Définition 6 – Racine carrée

Pour tout nombre positif a, il existe un unique nombre positif b tel que $b^2 = a$. Ce nombre b est appelé racine carrée de a et s'écrit $\sqrt{a}$. Ainsi, pour tout nombre positif a, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.

Exemple :

- Si l'aire d'un carré est 6 cm^2, alors son côté est égal à $\sqrt{6}$ cm.
- Si l'aire d'un cercle est 5 cm^2, alors son rayon est égal à $\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}$ cm.
- Si le côté d'un carré est égal à 1 cm, alors sa diagonale est égale à $\sqrt{2}$ cm (théorème de Pythagore).



Propriété 9

Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Preuve : $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = ab$ $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \dfrac{a}{b}$

Exemple :

$\sqrt{3600} = \sqrt{36} \times \sqrt{100} = 6 \times 10 = 60$ $\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

6 Fractions, nombres décimaux, pourcentages

Les nombres tels que $\frac{5}{11}$, $\frac{3}{3}$ et $\frac{17}{5}$ dont l'écriture est constituée de deux nombres entiers superposés sont appelés **fractions**. La ligne de séparation est appelée **barre de fraction**. L'entier au-dessus de la barre de fraction est appelé le **numérateur** et l'entier au-dessous de la barre de fraction est appelé le **dénominateur**.

La plupart des nombres que nous utilisons dans la vie de tous les jours sont des fractions (ou peuvent être exprimés sous forme de fraction). En mathématiques, les fractions sont appelés **nombres rationnels**.

Les nombres qui ne peuvent pas être exprimés par une fraction sont appelés nombres irrationnels (π ou $\sqrt{2}$ par exemple).

Propriété 10 – Réduction de fraction

Une fraction peut être réduite en divisant le numérateur et le dénominateur par un facteur commun.

Exemple : réduction de $\frac{8}{18}$

$$2 \text{ est un diviseur de 8 et de 18 : } \frac{8}{18} = \frac{2 \times 4}{2 \times 9} = \frac{4}{9}.$$

4 et 9 n'ont pas de diviseur commun, la fraction $\frac{4}{9}$ ne peut donc pas être réduite, on dit qu'elle est **irréductible**.

Remarque : La calculatrice réduit automatiquement les fractions.

Définition 7 – Fraction décimale

Une fraction dont le dénominateur est 10 ou 100 ou une puissance de 10 est appelée **fraction décimale**.

Définition 8 – Nombre décimal

Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une quantité finie de chiffres à droite de la virgule. Une fraction décimale peut toujours s'écrire sous la forme d'un nombre décimal.

Exemple : $\frac{75}{100} = 0,75$.

Définition 9 – Pourcentage

Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

Exemple : $75\% = \frac{75}{100} = 0,75$ (« 75 pour cent » signifie « 75 centièmes »).

7 Opérations avec les fractions

Pour **multiplier deux fractions**, il faut multiplier les dénominateurs entre eux et les numérateurs entre eux.

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$$

Pour **multiplier une fraction** par un nombre, il faut multiplier le numérateur avec le nombre.

$$\frac{3}{5} \times 7 = \frac{3 \times 7}{5} = \frac{21}{5}$$

Attention : Il faut penser à réduire les fractions avant de multiplier.

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{\cancel{3} \times 2 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{2}{3}$$

Pour **calculer la fraction** d'un nombre, il faut multiplier le nombre avec la fraction.

Exemple : Calcul de $\frac{2}{7}$ de 350

$$\frac{2}{7} \times 350 = \frac{700}{7} = 100$$

Pour **calculer le pourcentage** d'un nombre, il faut de multiplier le nombre avec le pourcentage.

Exemple : Calcul de 30% de 240

$$30\% \text{ de } 240 = \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}} \times 24\cancel{0} = 3 \times 24 = 72$$

Pour **diviser un nombre par une fraction**, il faut multiplier ce nombre avec l'inverse de la fraction.

Rappel : l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

$$10 \div \frac{4}{7} = 10 \times \frac{7}{4} = \frac{70}{4} \qquad \frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{10} \qquad \frac{\frac{8}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{7}$$

Pour **additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont le même dénominateur**, il faut additionner (ou soustraire) les numérateurs et conserver le dénominateur commun.

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

Pour **additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont des dénominateurs différents**, il faut mettre les fractions au même dénominateur puis les additionner (ou soustraire).

$$\frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1 \times 2}{6 \times 2} - \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{2}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{7}{12}$$